7. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: bis 07.06.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe
(a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:

(i) $f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$,

(ii) $f^2 \equiv g^2 \Rightarrow f \equiv g$ oder $f \equiv -g$.

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?
(c) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Zeige $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(d) Sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1 - e^{1/z}$. Finde eine injektive Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist dies ein Widerspruch zum Identitätssatz?

2. Aufgabe (2+3+3+2 Punkte)
(a) Beweise die folgende Verallgemeinerung des Identitätssatzes: Sind f und g holomorph in einem Gebiet D und existiert ein Punkt $z_0 \in D$, so dass fast alle (d. h. bis auf endlich viele) Ableitungen von f und g in z_0 übereinstimmen, so gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, so dass gilt: $f(z) = g(z) + p(z)$, $z \in D$.
(b) Sei f holomorph in der Umgebung von $\overline{B_r(0)}$ und $z \in B_r(0)$. Zeige, dass

$$f(z) - f(0) = \frac{z}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\zeta} d\zeta\,.$$

Falls $r \geq 2|z|$, zeige dass

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2|z|}{r} \sup_{|\zeta|=r} |f(\zeta)|.$$

Leite daraus den Satz von Liouville her.
(c) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und sei $0 < \rho < r$. Zeige

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$$

und folgere $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leq M_\rho^2$ wobei $M_\rho = \max_{|z|=\rho}\{|f(z)|\}$ ist.
(d) Zeige mit Hilfe von (c) das Maximumprinzip.

(bitte wenden)

3. Aufgabe
(a) Sei D ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $h \in \mathcal{O}(D) \bigcap \mathcal{C}(\overline{D})$, so dass $\left|h|_{\partial D}\right|$ konstant ist. Zeige, dass h konstant ist oder dass h eine Nullstelle in D hat.
(b) Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ nicht-konstant, so dass $\left|f|_{\partial \mathbb{D}}\right|$ konstant ist. Zeige, dass es $p \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{D}$, $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}$ und $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ gibt mit

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} \ldots (z - a_p)^{m_p} g(z),\ z \in \mathbb{D},$$

wobei g keine Nullstellen in $\mathbb{D}$ hat.
(c) Sei $a \in \mathbb{D}$ und $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Zeige, dass $|\varphi_a(z)| = 1$ für $|z| = 1$.
(d) Sei f eine Funktion wie in (b). Zeige, dass $h : \overline{\mathbb{D}} \setminus \{a_1, \ldots, a_p\} \to \mathbb{C}$, $h = f \varphi_{a_1}^{-m_1} \cdots \varphi_{a_p}^{-m_p}$ eine Fortsetzung $\widetilde{h} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ hat, mit $\left|\widetilde{h}|_{\partial \mathbb{D}}\right|$ konstant. Leite her, dass es $C \in \mathbb{C}$ gibt, mit

$$f(z) = C \varphi_{a_1}^{m_1}(z) \cdots \varphi_{a_p}^{m_p}(z),\ z \in \overline{\mathbb{D}},$$

insbesondere ist f eine rationale Funktion.