8. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: bis 14.06.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe (1+2+2+2+3 Punkte)

Bestimme jeweils den Typ der Singularität an der Stelle a für die durch die folgenden Funktionsausdrücke definierten Funktionen:

(a) $f(z) := \dfrac{\exp(z) - 1 - z}{z}$, $a = 0$.

(b) $f(z) := \dfrac{1}{\exp(z) - 1}$, $a = 0$.

(c) $f(z) := \dfrac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}$, $a = 1$.

(d) $f(z) := z \cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$, $a = 1$.

(e) Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1,2\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) := \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, entwickle man in den Ringgebieten

$$K_{0,1}(0)\ , \qquad K_{1,2}(0)\ , \qquad K_{2,\infty}(0)$$

jeweils in eine Laurent–Reihe. (Notation: $K_{r_1,r_2}(a) := \{\, z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z-a| < r_2 \,\}$.)

2. Aufgabe

Sei $r > 0$ und $D := B_r(0) \setminus \{0\}$ und
$f_1 : D \to \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto f_1(z) := \exp(1/z)$,
$f_2 : D \to \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto f_2(z) := \exp(1/z) + \exp(-1/z)$.
Zeige (ohne Verwendung des Satzes von Picard):

$$f_1(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}\ , \qquad f_2(D) = \mathbb{C}\ .$$

3. Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $D \neq \emptyset$, und $S \subset D$ eine diskrete Teilmenge, $S \neq \emptyset$, und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeige:

(a) Kein Punkt $s \in S$ ist eine wesentliche Singularität.

(b) Ist $s \in S$ ein Pol von f, so ist s ein Pol erster Ordnung.