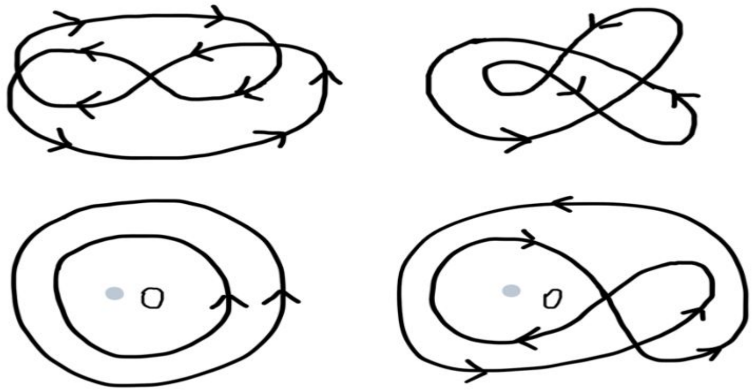
9. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: bis 21.06.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe
(a) Berechne die Umlaufzahl in den Komponenten des Komplements der ersten zwei Kurven in der Figur.
(b) Welche der folgenden Zyklen sind nullhomolog in $\mathbb{C}^\star$, welche Randzyklen?



2. Aufgabe
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(D)$ und $a \in D$.
(a) Zeige:
(i) Ist a eine Nullstelle von f von $\operatorname{ord}_a(f) = k \geqslant 1$ so gilt $\operatorname{ord}_a(f') = k - 1$.
(ii) Ist a eine Nullstelle von f' von $\operatorname{ord}_a(f') = k \geqslant 0$ so gilt $\operatorname{ord}_a(f) = 0$ oder $\operatorname{ord}_a(f') = k + 1$.
(iii) Ist a eine Pollstelle von Ordnung k von f, so ist a eine Pollstelle von Ordnung $k + 1$ von f' und in der Laurententwicklung von f' kommt kein Summand $\frac{a_{-1}}{z-a}$ vor.
(iv) Ist a eine Pollstelle von Ordnung k von f', so gilt $k \geqslant 2$ und a ist eine Pollstelle von Ordnung $k - 1$ von f.
(b) Sei a eine Pollstelle von f. Zeige, dass e^f eine wesentliche Singularität in a besitzt.

Bitte wenden.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sei f meromorph im Punkt $a \in \mathbb{C}$. Zeige:

(a) Ist a Polstelle erster Ordnung, dann gilt $\mathrm{res}_a f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$.

(b) Ist a eine k-fache Polstelle von f, so kann man $g(z) := (z-a)^k f(z)$ holomorph nach a fortsetzen. Zeige: $\mathrm{res}_a f = g^{(k-1)}(a)/(k-1)!$.

(c) Ist a eine einfache Nullstelle von f, dann gilt $\mathrm{res}_a \frac{1}{f} = 1/f'(a)$.

(d) Seien h, g holomorph in a und habe g in a eine einfache Nullstelle und $h(a) \neq 0$. Beweise: $\mathrm{Res}_a \frac{h}{g} = h(a)/g'(a)$.

(e) Berechne $\mathrm{Res}_a \dfrac{\exp(iz)}{z^2+1}$ für alle Punkte a der oberen Halbebene.

Berechne $\mathrm{Res}_k \, \pi \dfrac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ für alle Punkte $k \in \mathbb{Z}$.

4. Aufgabe

Hat f in ∞ eine isolierte Singularität, so defineirt man $\mathrm{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} f(z) dz$, wobei der Radius R der Kreisscheibe so groß gewählt wird, dass f keine weitere Singularität im Komplement der Kreisscheibe hat. Zudem sei wie üblich $n(\partial B_R(0), 0) = 1$.

(a) Dann gilt $\mathrm{res}_\infty f = -\mathrm{res}_0 \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}(z) = z^{-2} f(\frac{1}{z})$.

(b) Sei $f \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine rationale Funktion. Dann gilt $\sum_{p \in \hat{\mathbb{C}}} \mathrm{res}_p f = 0$.