

10. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: bis 28.06.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe

Für die durch die folgenden Funktionsterme definierten Funktionen bestimme man jeweils in all ihren Singularitäten die Residuen:

$$(a) \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} \quad (b) \frac{\exp(z)}{(z - 1)^2} \quad (c) z \exp\left(\frac{1}{1 - z}\right).$$

2. Aufgabe

(10 Punkte)

(i) Berechne folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$(a) \int_{|\zeta|=5} \frac{\exp(\zeta)}{\cosh(\zeta)} d\zeta, \quad (b) \int_{\alpha} \frac{2 + 3 \sin(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta - 1)^2} d\zeta.$$

Dabei ist α der "Viereckenweg" mit den Eckpunkten $3 + 3i$, $-3 + 3i$, $-3 - 3i$, $3 - 3i$.

(ii) Zeige:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 3 \cos t} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 5} = \frac{\pi}{8}(\sqrt{5} - 1), \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{7\pi}{16e}.$$

3. Aufgabe

Zeige, dass für $\lambda > 1$ die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der Halbebene $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ genau eine Lösung besitzt.

4. Aufgabe

(a) Bestimme die Anzahl der Nullstellen von

$$f(z) = z^5 + iz^3 - 4z + i \text{ in } \{1 < |z| < 2\}.$$

(b) Berechne

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{8z^3 - 5}{2z^4 - 5z + 2} dz.$$