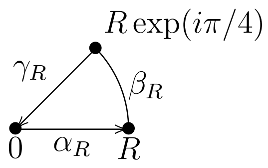
SS 21 Marinescu / Zielinski

11. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: bis 05.07.21, 23:59 Uhr auf Ilias

1. Aufgabe (5 Punkte)
Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,,$$



indem Sie das Kurvenintegral $\int_\alpha \exp(iz^2)\,dz$ längs der Kurve $\alpha := \alpha_R * \beta_R * \gamma_R$ betrachten, den Cauchyschen Integralsatz und die Abschätzung aus der Aufgabe 4(c) Blatt 4 benutzen.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei G ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, $S \subset G$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge und $f\colon G \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:

f hat eine Stammfunktion in $G \setminus S$ $\Leftrightarrow$ alle Residuen (in G) von f verschwinden.

3. Aufgabe
Sei f in $\mathbb{D}$ holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Zeige:

(i) Ist f gerade, d. h. $f(-z) = f(z)$, dann gilt $\mathrm{res}_z f = -\mathrm{res}_{-z} f$ für $z \in \mathbb{D}$; insbesondere $\mathrm{res}_0 f = 0$.

(ii) Ist f ungerade, d. h. $f(-z) = -f(z)$, dann gilt $\mathrm{res}_z f = \mathrm{res}_{-z} f$ für $z \in \mathbb{D}$.

4. Aufgabe
(a) Sei $f \not\equiv 0$ eine meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ und $A = N(f) \cup P(f)$ die Menge der Null- und Polstellen von f in $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann gilt

$$\sum_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} \mathrm{ord}_z f = \sum_{z \in A} \mathrm{ord}_z f = 0.$$

(b) Seien $z_1, \ldots, z_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, und seien $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ so, dass $m_1 + \ldots + m_n = 0$. Dann gibt es eine meromorphe Funktion f auf $\widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$\mathrm{ord}_z f = \begin{cases} m_j, & \text{falls } z = z_j \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, n\}\,, \\ 0, & \text{falls } z \notin \{z_1, \ldots, z_n\}\,. \end{cases}$$