12. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Keine Abgabe; die Lösungen werden in der Übung diskutiert

1. Aufgabe

(a) Sei $S := \{ -n \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$$

in $\mathbb{C} \setminus S$ zwar lokal gleichmässig, aber nicht normal konvergiert.
(b) Berechne die Hauptteilverteilung der meromorphen Funktion

$$\frac{\cot \pi z}{\sin^2 \pi z}$$

und finde ihre Partialbruchentwicklung.

2. Aufgabe

Berechne folgende Integrale:

$$\int_{\partial B_5(0)} \frac{z^3}{z^4-1} dz, \qquad \int_{\partial B_2(0)} \frac{dz}{(z-3)(z^{13}-1)},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{25 - 24\cos^2(t)}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x \, dx}{x^2+1}.$$

3. Aufgabe

(a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Zeige, dass g holomorph ist mit $g^{(n)}(z_0) = \overline{f^{(n)}(\overline{z_0})}$ für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.
(b) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ betrachte man die Funktion $f_\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_\alpha(z) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ mit $z = x + iy$. Bestimme (in Abhängigkeit von α) alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ in denen

(i) f_α komplex differenzierbar ist,

(ii) f_α holomorph ist.

4. Aufgabe

(a) Formuliere den *Potenzreihenentwicklungsssatz*.

(b) Sei $r > 0$. Die holomorphe Funktion $f : B_r(0) \to \mathbb{C}$ sei gerade (d.h. $f(-z) = f(z)$ für alle $|z| < r$). Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Taylorreihe von f in $B_r(0)$. Zeige, dass $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \geqslant 0$.

Bitte wenden.

(c) Zeige, dass die Funktion $z \mapsto 1/\cos z$ in 0 holomorph ist und bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $a = 0$.

(d) Zeige, dass diese Taylorreihe die folgende Form hat:

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \ , \ \text{für } |z| < 1/2021 \ .$$

Berechne E_{2n} für $0 \leqslant n \leqslant 2$.

5. Aufgabe
(a) Bestimme $\mathrm{res}_a \left(z \mapsto \frac{1}{z^2-(1+i)z+i} \right)$ für $a \in \mathbb{C}$.
(b) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in D$ und $f \colon D \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung k in 0. Weiter bezeichne h die holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto z^k f(z)$ nach D. Zeige $h^{(k-1)}(0)/(k-1)! = \mathrm{res}_0 f$.
(c) Bestimme den Hauptteil der Funktion $z \mapsto z^{-17} e^z$ um den Nullpunkt.
(d) Bestimme $\nu_f(0)$ für $f(z) = \cos^2(z)$.

6. Aufgabe
Sei $R > 0$ beliebig.
(a) Bestimme $\mathrm{int}(\partial B_R(0))$ und $\mathrm{ext}(\partial B_R(0))$.
(b) Sei $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve mit $|\gamma| \subset B_R(0)$. Zeige $\mathrm{ext}(\partial B_R(0)) \subset \mathrm{ext}(\gamma)$ und folgere daraus, dass $\mathrm{int}(\gamma)$ beschränkt ist.
(c) Gebe ein Beispiel einer geschlossenen Kurve γ, so dass $\mathrm{ext}(\gamma)$ nicht zusammenhängend ist.

7. Aufgabe
Es sei f eine ganze Funktion mit $f(1/n) = f(-1/n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine holomorphe Funktion $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $g(z^2) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.