0. Blatt zur Analysis I

Aussagenlogik.
Das Symbol $\wedge$ bezeichne die **Konjunktion**, $\vee$ die **Disjunktion** $\neg$ bezeichne die **Negation**. Sind A und B Aussagen, dann lesen sich $A \wedge B$ als "A und B", $A \vee B$ als "A oder B" und $\neg A$ als "nicht A". Formal definieren wir diese Junktoren darüber, wie sie den Wahrheitswert von Aussagen beeinflussen: Ist beispielsweise A **wahr**, dann ist $\neg A$ **falsch**. Eine **Wahrheitstabelle** ist eine tabellarische Gegenüberstellung von Wahrheitswerten von Aussagen. Mit Hilfe von Wahrheitstabellen definieren wir dann für die drei genannten Junktoren:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

wobei 1 wahr bedeutet und 0 falsch.

1. Aufgabe (0 Punkte)
Es sei V die Aussage "Die Vorlesung findet heute statt.", D sei die Aussage "Der Dozent ist heute da." und R sei die Aussage "Es regnet.".

(a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in deutscher Sprache (ohne sie in eine äquivalente Aussage umzuformen):
(i) $V \wedge (D \vee R)$ (ii) $\neg(V \wedge D) \vee R$
(iii) $V \vee (\neg(D \wedge (\neg R)))$ (iv) $\neg(V \wedge D) \vee (D \wedge (\neg R))$
(v) $V \wedge (\neg(D \vee R))$ (vi) $\neg(V \wedge D) \wedge (D \wedge (\neg R \vee (\neg V)))$

Lösungsvorschlag:

(i) Die Vorlesung findet heute statt und es gilt, dass der Dozent heute da ist oder es regnet.
(ii) Es gilt nicht, dass die Vorlesung heute stattfindet und der Dozent heute da ist oder es regnet.
(iii) Die Vorlesung findet heute statt oder es gilt nicht, dass der Dozent heute da ist und es nicht regnet.
(iv) Es gilt nicht, dass die Vorlesung heute stattfindet und der Dozent heute da ist oder es gilt, dass der Dozent heute da ist und es nicht regnet.
(v) Die Vorlesung findet heute statt und es gilt nicht, dass der Dozent heute da ist oder es regnet.

(bitte wenden)

(vi) Es gilt nicht, dass die Vorlesung heute stattfindet und der Dozent heute da ist und es gilt, dass der Dozent heute da ist und es gilt, dass es nicht regnet oder die Vorlesung heute nicht stattfindet.

□

(b) Schreiben Sie jede der Aussagen aus Aufgabenteil (a) in eine Wahrheitstabelle und geben Sie ihren Wahrheitsgehalt in Abhängigkeit der Wahrheitsgehälter der Aussagen V, D und R an.

Lösungsvorschlag:

V	D	R	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0

□

(c) Das Symbol $\Rightarrow$ (häufig auch $\rightarrow$) bezeichne den Junktor der **Subjunktion**, auch bekannt als **Implikation**. Sind A und B zwei Aussagen, dann ist dieser definiert durch

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(i) Stellen Sie die Subjunktion dar, indem Sie ausschließlich die Negation und die Disjunktion benutzen. Beweisen Sie Ihre Behauptung (indem Sie eine Wahrheitstabelle angeben).

(ii) Stellen Sie die Negation der Subjunktion dar, indem Sie ausschließlich die Negation und die Konjunktion benutzen. Beweisen Sie Ihre Behauptung (indem Sie eine Wahrheitstabelle angeben).

(bitte wenden)

(iii) Die Implikation ist bekannt dafür, häufig zu Missverständnissen zu führen. Warum? (Tipp: Schauen Sie sich den Zusammenhang der Gesamtaussage "Wenn A, dann B" mit den Einzelaussagen A und B in der Wahrheitstabelle an. Veranschaulichen Sie die Problematik um die Subjunktion anhand eines Beispieles aus dem Alltag.)

Lösungsvorschlag:

(i)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

(ii)

A	B	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	0	0

(iii) Ist A eine falsche Aussage, dann ist $A \Rightarrow B$ wahr für beliebige Aussagen B, wie man an der Wahrheitstabelle sieht. Benutzt man dies umgangssprachlich, so lassen sich scheinbar widersinnige Folgerungen als im logischen Sinne wahre Aussagen formulieren. Exemplarisch sei A die Aussage "$3 \cdot 3 = 7$" und B die Aussage "Der Mensch ist unsterblich.". Offensichtlich sind sowohl A als auch B je als Einzelaussage falsch, allerdings entspricht die Gesamtaussage "Wenn $3 \cdot 3 = 7$, dann ist der Mensch unsterblich." gerade der Subjunktion $A \Rightarrow B$ und wie man in der Wahrheitstabelle sehen kann, ist diese Aussage stets wahr.

□

Beweistechniken.

(i) **Direkter Beweis** Man nennt einen Beweis **direkt**, wenn man von einer wahren Aussage A durch eine Folge von einer oder mehreren Subjunktionen die Wahrheit einer Aussage B folgert. In der Wahrheitstabelle der Subjunktion sieht man, dass wenn A und $A \Rightarrow B$ wahr sind, dann muss B wahr sein.

(ii) **Indirekter Beweis: durch Kontraposition** Bei einem indirekten Beweis nehme man an, dass die Aussage B, deren Wahrheit man zeigen möchte, *falsch* ist und folgere durch eine Folge von einer oder mehreren Subjunktionen die *Falschheit* einer Aussage A, die Teil der Voraussetzungen ist. Diese Argumentationskette ist äquivalent zur Aussage $A \Rightarrow B$, wie man sich mir einer Wahrheitstabelle klar machen kann.

(bitte wenden)

Indirekter Beweis: durch Widerspruch Bei einem Beweis durch Widerspruch nimmt man an, dass die Zielaussage nicht wahr ist. Daraus folgert man dann die Wahrheit einer Aussage, deren Falschheit bereits bekannt ist (wie beispielsweise $1 = 0$). Dies gibt einen Widerspruch und folglich musste die eigene Annahme falsch gewesen sein. Daraus folgt die Wahrheit von B.

(iii) **Beweis durch vollständige Induktion** Zu jeder natürlichen Zahl n sei $A(n)$ eine Aussage. Man möchte zeigen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Ein Beweis durch vollständige Induktion besteht nun aus folgenden beiden Teilbeweisen:

(1) **Induktionsanfang (I.A.)** Zeige: $A(1)$ ist wahr.

(2) **Induktionsschritt (I.S.)** Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, für die $A(n)$ wahr ist, muss auch $A(n+1)$ wahr sein.

Insgesamt folgt damit, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Annahme im Induktionsschritt, dass die Aussage bereits für $A(n)$ für irgendein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, nennt man **Induktionsvoraussetzung (I.V.)**. Für welche Zahl man den Induktionsanfang zeigt, ist situationsabhängig.

2. Aufgabe (0 Punkte)

(a) Beweisen Sie (**direkt**):

(i) Quadrate gerader Zahlen sind gerade.

Lösungsvorschlag:

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine gerade Zahl. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = 2k$. Es folgt

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)\,.$$

Da nun das Quadrat einer nichtnegativen Ganzzahl wieder eine nichtnegative Ganzzahl ist, folgt, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $n^2 = 2m$. Somit ist das Quadrat einer geraden Zahl gerade. □

(ii) Quadrate ungerader Zahlen sind ungerade.

Lösungsvorschlag:

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine ungerade Zahl. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = 2k + 1$. Es folgt

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1\,.$$

Da nun das Quadrat einer nichtnegativen Ganzzahl wieder eine nichtnegative Ganzzahl ist, folgt, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $n^2 = 2m + 1$. Somit ist das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade. □

(bitte wenden)

(b) Beweisen Sie (**indirekt**):

(i) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.
Lösungsvorschlag:

Beweis. Angenommen, die Wurzel aus 2 wäre rational. Dann existieren zwei ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

wir können annehmen, dass p und q teilerfremd sind (andernfalls kürzen wir alle Teiler heraus und erhalten einen Zähler $\tilde{p}$ und einen Nenner $\tilde{q}$ und führen mit diesen Zahlen unseren Beweis fort). Wir rechnen nun

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 .$$

Damit ist p gerade. Es existiert daher eine Ganzzahl $n \in \mathbb{Z}$, so dass $p = 2n$. Mit obiger Rechnung folgt dann

$$(2n)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4n^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2n^2 = q^2 .$$

Also ist q gerade. Damit ist 2 sowohl ein Teiler von p als auch von q und daher sind p und q nicht teilerfremd.
Widerspruch. $\lightning$ $\square$

(ii) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Lösungsvorschlag:

Beweis. Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Diese können wir schreiben als Menge $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ endlich vieler Elemente, für irgendein $r < \infty$. Wir konstruieren nun eine neue Zahl, indem wir alle Primzahlen aufmultiplizieren und 1 addieren:

$$m := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1 .$$

Sei nun p ein Primteiler von m. Nun folgt: p ist verschieden von p_k für alle $1 \leq k \leq r$, denn sonst würde p neben m auch das Produkt der Primzahlen $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ teilen; dies kann nicht der Fall sein, denn bei herausteilen von p aus m bleibt ein Rest von 1 übrig, nach Konstruktion der Zahl m. Also haben wir eine weitere Primzahl gefunden, die wir nicht aufgelistet haben. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass ein $1 \leq r < \infty$ existiert, so dass die Menge $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ alle Primzahlen enthält. $\lightning$ $\square$

(bitte wenden)

(c) Beweisen Sie (**durch vollständige Induktion**):

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$: $1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Lösungsvorschlag:

Beweis. $n = 1$: Es gilt $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$.
$n \mapsto n+1$: Unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ gilt, wollen wir zeigen, dass $A(n+1)$ gilt. Die Aussage $A(n+1)$ ist

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2)\,.$$

Dies gilt es zu zeigen (was durch das Ausrufezeichen über dem Gleichheitszeichen angedeutet wurde). Wir rechnen nun direkt nach und formen um:

$$\begin{aligned}(1+2+3+\ldots+(n-1)+n)+(n+1) &\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2)\,.\end{aligned}$$

Dies zeigt $A(n+1)$ und beendet den Indunktionsschritt. □

(ii) Gegeben Zahlen von 1 bis $n \in \mathbb{N}$, nennt man eine **Anordnung von** n **Elementen** eine Bijektion $\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$. Bei $n = 2$ bekommt man zwei Anordnungen der Elemente $\{1,2\}$ beispielsweise durch die Identitätsabbildung $x \mapsto x$ für $x \in \{1,2\}$ und die Transpositionsabbildung, die definiert ist durch $1 \mapsto 2$ und $2 \mapsto 1$; also die "Vertauschung" der beiden Elemente. Die Identitätsabbildung kann man notieren als 12 und die Transpositionsabbildung als 21. In dieser Notation steht an der ersten Stelle diejenige Zahl, auf die unter der Abbildung, die die Anordnung definiert, die 1 geschickt wird und weiter steht an der k-ten Stelle diejenige Zahl, auf die unter der Abbildung die Zahl k geschickt wird, für $1 \leq k \leq n$.
Beweisen Sie nun:
Die Anzahl aller Anordnungen n verschiedener Elemente ist $n!$.

Lösungsvorschlag:

Beweis. $n = 0$: Es gilt $0! = 1$ nach Konvention.
$n = 1$: Es gilt $1! = 1$.
$n = 2$: Wir bezeichnen die Elemente mit 1 und 2. Es gibt nun die beiden Anordnungen 12 und 21.

(bitte wenden)

$n = 3$: Für $n = 3$ zählen wir die folgenden $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ Anordnungen:

$$\begin{array}{ccc} 123, & 213, & 312, \\ 132, & 231, & 321. \end{array}$$

$n \mapsto n+1$: Unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ gilt, zeigen wir, dass $A(n+1)$ gilt. Wir zählen zunächst alle Anordnungen, in denen ein beliebiges Element k mit $1 \leq k \leq n+1$ festgehalten wird. Die Menge aller Anordnungen der Elemente $1, 2, \ldots, n+1$, die das k-te Element an erster Stelle und die übrigen Elemente beliebig geordet haben, ist nach Induktionsvoraussetzung $n!$. Es gibt genau $n+1$ solcher Mengen (für jede Wahl von k genau eine). Es folgt, dass die Anzahl der Anordnungen solcher Elemente insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ ergibt. Dies zeigt $A(n+1)$ und beendet den Indunktionsschritt. $\square$

(iii) Zeigen Sie, dass für $x \neq 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die *geometrische Summenformel*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Lösungsvorschlag:

Beweis. $n = 0$: Es gilt $1 = \frac{1-x}{1-x}$ für alle $x \neq 1$.
$n = 1$: Es gilt $1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$ für alle $x \neq 1$ (dritte binomische Formel).
$n \mapsto n+1$: Unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ gilt, wollen wir zeigen, dass $A(n+1)$ gilt. Die Aussage $A(n+1)$ ist

$$1 + x + \ldots + x^n + x^{n+1} \stackrel{!}{=} \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

Dies gilt es zu zeigen. Wir rechnen nun:

$$\begin{aligned} (1 + x + \ldots + x^n) + x^{n+1} &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

Dies zeigt $A(n+1)$ und beendet den Indunktionsschritt. $\square$