Fortsetzung: 0. Blatt zur Analysis I

***

"A set is a Many that allows itself to be thought as one."
Georg Cantor

***

Beweistechniken.
Wir hatten bei der Beweistechnik des **indirekten Beweises** zwei Arten unterschieden: Beweis durch Widerspruch und Beweis durch **Kontraposition**.

1. Aufgabe (0 Punkte)
Beweisen Sie durch **Kontraposition**:
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt: Falls $ac \leqslant bc$, dann ist $c \leqslant 0$.
Lösungsvorschlag:
Vor.: $a, b, c \in \mathbb{R}$, mit $a > b$
Beh.: $ac \leqslant bc \Rightarrow c \leqslant 0$
Beweis. Sei A die Aussage $ac \leqslant bc$ und B die Aussage $c \leqslant 0$. In Junktoren-Notation liest sich die Behauptung als $A \Rightarrow B$. Dies ist äquivalent zu der Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$, die wir jetzt beweisen werden.
Sei also $c > 0$. Wir können beide Seiten der gegebenen Ungleichung $a > b$ mit c multiplizieren und erhalten dann $ac > bc$, da c positiv ist. Damit ist $\neg B \Rightarrow \neg A$ gezeigt und somit auch die Behauptung $A \Rightarrow B$. □

2. Aufgabe (0 Punkte)
Wo liegt der Fehler in den folgenden "Beweisen"?

(i) Beh.: $\forall n \in \mathbb{Z}$ gilt $n + 1 < n$
Beweis. $n \mapsto n+1$: Es gilt $n + 2 = (n + 1) + 1 \overset{I.V.}{<} n + 1$. Da n beliebig war, folgt das Behauptete. □
Lösungsvorschlag:
Hier fehlt ein Induktionsanfang. Die Induktionsvoraussetzung ist nur wahr, sofern ein Induktionsanfang geglückt ist. Wenn man genau hinschaut, lässt sich kein funktionierender Induktionsanfang nachweisen. Logisch - die Aussage ist natürlich quatsch: Es gibt keine ganze Zahl die kleiner wird, wenn man 1 hinzuaddiert.

(bitte wenden)

(ii) Beh.: Alle Menschen sind gleich groß.

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt: bei einer Menschenmenge, in der nur ein Mensch enthalten ist, sind alle Menschen dieser Menschenmenge gleich groß.

$n \mapsto n+1$: Wir betrachten einen Raum, indem sich $n+1$ Menschen befinden. Um zu zeigen, dass alle gleich groß sind, schicken wir eine Person aus dem Raum. Nach der Induktionsvoraussetzung sind die n im Raum verbliebenen Menschen gleich groß. Nun bitten wir die sich draußen befindende Person wieder rein und schicken stattdessen eine andere der $n+1$ Personen raus - eine, die wir schon mit den anderen verglichen haben. Dann befinden sich wieder n Menschen in einem Raum und nach Induktionsvoraussetzung sind diese wieder gleich groß. Insgesamt sind also alle $n+1$ Menschen gleich groß. $\square$

Lösungsvorschlag:

Der Induktionsschritt muss für $n = 2$ gemacht werden, da der Wahrheitsgehalt der Aussage, "Menschen sind gleich groß" nur überprüft werden kann, wenn man mindestens zwei Menschen miteinander vergleicht.

Mengelehre.

Gegeben Mengen M, M_1 und M_2, definieren wir folgende Mengen und **Mengenoperationen**:

- **"leere Menge"**: $\varnothing := \{\}$ ("Die Menge, die kein Element enthält."),
- **(Durch-)Schnitt**: $x \in M_1 \cap M_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} [x \in M_1 \text{ und } x \in M_2]$,
- **Vereinigung**: $x \in M_1 \cup M_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} [x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2]$,
- **"ohne"**: $x \in M_1 \setminus M_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} [x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2]$,
- **Teilmenge**: $M_1 \subset M_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} [x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2]$
- **Komplement**: Falls $M_1 \subset M_2$: $x \in M_1^{\complement}$ bezüglich $M_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in M_2 \setminus M_1$, andernfalls $M_1^{\complement} := \varnothing$.
- **Potenzmenge**: $\mathcal{P}(M) \overset{def}{=} \bigcup\{N : N \subset M\}$ ("Die Menge aller Teilmengen von M".).

Nach Konvention ist die leere Menge in jeder Menge als Teilmenge enthalten und jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

(bitte wenden)

3. Aufgabe (0 Punkte)

(i) Seien

$$
\begin{aligned}
M_1 &:= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}\,,\\
M_2 &:= \{1,2,3,4\}\,,\\
M_3 &:= \{8,7,6,3\}\,,\\
M_4 &:= \{3,4,3,4,3,4\}\,,\\
M_5 &:= \{5\}\,,\\
M_6 &:= \{8,4,2,0,1\}\,,\\
M_7 &:= \{1,2\}
\end{aligned}
$$

Mengen. Entscheide in jedem einzelnen Fall, welches der Symbole $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ oder $\setminus$ korrekt ist oder ob keines dieser Symbole passt:

(i) $0 \;?\; M_1\,,\qquad \{0\} \;?\; M_1\,,\qquad \varnothing \;?\; M_1\,,\qquad \{\varnothing\} \;?\; M_1$

(ii) $M_2 \;?\; M_1\,,\qquad M_1 \;?\; \mathcal{P}(M_1)\,,\qquad \{M_1\} \;?\; \mathcal{P}(M_1)\,,\qquad \{\varnothing\} \;?\; \mathcal{P}(M_1)$

(iii) $M_4 \;?\; M_1\,,\qquad \{M_4 \;?\; M_5\} \;?\; \mathcal{P}(M_1)\,,\qquad \{M_4\} \;?\; \{M_5\} \;?\; \mathcal{P}(M_1)$

(iv) $M_5 \;?\; \{M_5\}\,,\qquad \{M_5\} \;?\; \{M_5\}$

(v) $\{\{M_5\}\} \;?\; \{\mathcal{P}(M_5)\}\,,\qquad \{\{M_5\}\} \;?\; \mathcal{P}(\mathcal{P}(M_5))$

(vi) $M_2 \;?\; (M_3 \;?\; M_2) = M_2\,,\qquad (M_6 \;?\; M_5) \;?\; M_3 = M_1$

(vii) $((M_6 \;?\; M_2) \;?\; M_7) \;?\; (M_2 \;?\; M_3) = M_4$

(viii) $M_4 \;?\; (\mathcal{P}(M_3) \;?\; \mathcal{P}(M_6))\;,\qquad M_4 \;?\; \mathcal{P}(M_3 \;?\; M_6)$

(ix) $\mathcal{P}(M_5) \;?\; \mathcal{P}(M_7) = (\mathcal{P}(M_7) \;?\; \mathcal{P}(M_2)) \;?\; \mathcal{P}(M_4)$

Lösungsvorschlag:
Wenn keines der Symbols einen sinnvollen Zusammenhang zwischen den beiden beteiligten Elementen/Mengen ausdrücken kann, wurde die entsprechende Stelle einfach leer gelassen.

(i) $0 \in M_1\,,\qquad \{0\} \subset M_1\,,\qquad \varnothing \subset M_1\,,\qquad \{\varnothing\} \quad M_1$

(ii) $M_2 \subset M_1\,,\qquad M_1 \in \mathcal{P}(M_1)\,,\qquad \{M_1\} \subset \mathcal{P}(M_1)\,,\qquad \{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(M_1)$

(iii) $M_4 \subset M_1\,,\qquad \{M_4 \cup M_5\} \subset \mathcal{P}(M_1)\,,\qquad \{M_4\} \cup \{M_5\} \subset \mathcal{P}(M_1)$

(iv) $M_5 \in \{M_5\}\,,\qquad \{M_5\} \subset \{M_5\}$

(v) $\{\{M_5\}\} \quad \{\mathcal{P}(M_5)\}\,,\qquad \{\{M_5\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M_5))$

(vi) $M_2 \cup (M_3 \cap M_2) = M_2$ **oder** $M_2 \cap (M_3 \cup M_2) = M_2\,,$
$(M_6 \cup M_5) \cup M_3 = M_1$

(vii) $((M_6 \cap M_2) \setminus M_7) \cup (M_2 \cap M_3) = M_4$

(viii) $M_4 \notin (\mathcal{P}(M_3) \cup \mathcal{P}(M_6))\;,\qquad M_4 \in \mathcal{P}(M_3 \cup M_6)$

(ix) $\mathcal{P}(M_5) \cap \mathcal{P}(M_7) = (\mathcal{P}(M_7) \cap \mathcal{P}(M_2)) \cap \mathcal{P}(M_4)$

□

(ii) Sei $M := \{S : S \text{ ist eine Menge und } S \notin S\}$ die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

(a) Gilt $M \in M$?

(b) Gilt $M \notin M$?

(c) Was folgt daraus?

Lösungsvorschlag:

(a) Wäre $M \in M$, dann enthält M sich selbst als Element. Mengen, die sich selbst als Element enthalten sind aber kein Element von M, da M nur aus denjenigen Mengen besteht, die sich selbst nicht als Element enthalten. Also folgt die Wahrheit der Aussage $\neg\,[M \in M]$.

(b) Wäre $M \notin M$, dann ist M nicht als Element in M enthalten. Mengen, die dies erfüllen, sind aber nach Definition der Menge M in M enthalten. Daher folgt die Wahrheit der Aussage $\neg\,[M \notin M]$.

(c) Aus der in (a) gezeigten Wahrheit von $\neg\,[M \in M] \Leftrightarrow M \notin M$ und der in (b) gezeigten Wahrheit von $\neg\,[M \notin M] \Leftrightarrow M \in M$ folgt die Wahrheit der Aussage $[M \in M] \wedge [M \notin M]$. Da sowohl $M \in M$ als auch $M \notin M$ Aussagen sind und damit auch der Ausdruck $[M \in M] \wedge [M \notin M]$ und Aussagen immer entweder wahr oder falsch sind und niemals beides gleichzeitig, muss eine der Voraussetzungen falsch gewesen sein. Es folgt: M ist keine Menge.

$\square$

(bitte wenden)

Nützliche Äquivalenzen für Verknüpfungen von Aussagen
Im folgenden seien P, Q, R Aussagen.

DeMorgan's Gesetze:

$$\begin{aligned} \neg(P \wedge Q) &\quad\Leftrightarrow\quad \neg P \vee \neg Q \\ \neg(P \vee Q) &\quad\Leftrightarrow\quad \neg P \wedge \neg Q \end{aligned}$$

Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} P \vee Q &\quad\Leftrightarrow\quad Q \vee P \\ P \wedge Q &\quad\Leftrightarrow\quad Q \wedge P \end{aligned}$$

Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &\quad\Leftrightarrow\quad (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \vee R) &\quad\Leftrightarrow\quad (P \vee Q) \vee R \end{aligned}$$

Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned} P \wedge P &\quad\Leftrightarrow\quad P \\ P \vee P &\quad\Leftrightarrow\quad P \end{aligned}$$

Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} P \vee (Q \wedge R) &\quad\Leftrightarrow\quad (P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \\ P \wedge (Q \vee R) &\quad\Leftrightarrow\quad (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \end{aligned}$$

Absorptionsgesetze:

$$\begin{aligned} P \vee (P \wedge Q) &\quad\Leftrightarrow\quad P \\ P \wedge (P \vee Q) &\quad\Leftrightarrow\quad P \end{aligned}$$

Zweifache Negation:

$$\neg(\neg P) \quad\Leftrightarrow\quad P$$