6. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 25.11.–26.11.19 in den Übungen

1. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $a > 0$ und $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werde rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass die Folge konvergent ist und berechne ihren Grenzwert.

2. Aufgabe (12 Punkte)

Berechne

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}, \quad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}}, \quad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5^k}, \quad \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+5}{k!}.$$

Zeige

$$\text{(e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(f)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.$$

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Berechne die Häufungswerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{n}{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad b_n = \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n.$$

Zusatzaufgabe (+ 9 Punkte)

Seien (f_n) die *Fibonacci-Folge*, rekursiv definiert durch $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 2$ und $g = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ die *Zahl des goldenen Schnittes*. Außerdem sei (x_n) rekursiv definiert durch $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ für $n \geq 1$.

(a) Zeige induktiv $f_{n+1} - f_n g = (-1)^n g^{-n}$ und folgere $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \to g$.

(b) Zeige induktiv $x_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ und folgere $x_n \to g$.

(c) Zeige $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_k f_{k+2}} = 1$.

Tipp zu (c): $\frac{1}{f_k f_{k+1}} - \frac{1}{f_{k+1} f_{k+2}} = ?$