4. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 11.11.–12.11.19 in den Übungen

Aufgrund des Karnevals finden am Montag, dem 11.11.19 bis auf Gruppe 1 und 3 keine Übungen statt. Diejenigen, die das betrifft, geben bitte in Gruppe 1 oder 3 oder am Dienstag, den 12.11.19 in den Gruppen 8 oder 9 ab.

1. Aufgabe (8 Punkte)

Seien $a, b > 0$ mit $a^2 \neq b$. Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien rekursiv definiert durch

$$a_0 := \frac{b}{a}, \quad b_0 := a, \quad \text{und für } n \in \mathbb{N}: \quad b_n := \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad a_n := \frac{b}{b_n}.$$

(a) Zeige induktiv $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen: $I_1, I_2, \ldots$ mit $I_n := [a_n, b_n]$ ist eine Intervallschachtelung, in deren Durchschnitt $\sqrt{b}$ liegt.

2. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n > 0$. Zeige:
$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$ und Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeige

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[n]{a^p} < 1 + \frac{p}{n}(a-1),$$

für $p \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < n$.

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme Betrag, Real- und Imaginärteil von

(i) $\frac{3+4i}{2-i}$, (ii) $(1+i)^8$, (iii) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(i) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$;

(ii) Für alle $z, w \neq 0$ gilt:

$$|z+w| = |z| + |w| \qquad \Longleftrightarrow \qquad z/w > 0.$$

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 8 Punkte)

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ zeige $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$.

(b) Sei $g := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ (die Zahl des goldenen Schnittes) und $h := g^{-1}$.
Sei $\zeta := \frac{1}{2}(h + i\sqrt{4-h^2})$. Zeige, dass ζ eine Lösung der Gleichung $z^5 - 1 = 0$ (also eine *5. Einheitswurzel*) ist. Wie sehen weitere Lösungen aus?

Tipp zu (b): Zeige $g = 1 + h$ und $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + gz + 1)(z^2 - hz + 1)$.