7. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 02.12.–03.12.19 in den Übungen

Im Namen der Fachschaft Mathematik möchten wir Sie alle herzlich zur diesjährigen Weihnachsfeier am 03.12. um 18:18 Uhr im Asta-Café an der Universitätsstraße einladen.

1. Aufgabe (8 Punkte)

Untersuche $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert sei als:

(a) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n}$, (b) $\dfrac{4n^2+2n-3}{3n^4-n^3+7}$, (c) $\dfrac{n^n}{4^n \cdot n!}$, (d) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n\geqslant 0}$ gibt mit:

(a) $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leqslant x - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{10^k} < \dfrac{1}{10^n}$.

Tipp zu (b): Wähle induktiv

$$a_0 = \lfloor x \rfloor, a_1 = \lfloor 10(x-a_0) \rfloor,\ a_2 = \lfloor 10^2(x - a_0 - \frac{a_1}{10}) \rfloor, \dots,$$
$$a_n = \lfloor 10^n(x - a_0 - \frac{a_1}{10} - \dots \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}) \rfloor, \dots .$$

Zeige, dass $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Man schreibt dann $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$.
Diese Darstellung heißt die **Dezimalbruchentwicklung** von x.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeige:

(a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=N+1}^{\infty} \dfrac{|z|^k}{k!} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Zudem gilt $\left| \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{z^k}{n^k} \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ für jedes $n > N$.

(bitte wenden)

(b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\right) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

Folgere: $\displaystyle\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \longrightarrow \exp(z)$ für $n \to \infty$.

Zusatzaufgabe (+ 8 Punkte)

Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt **offen**, wenn es für jedes $z \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \subset \Omega$ gibt. Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $A^{\complement} := \mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Zeige:

(a) Die Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ einer beliebigen Familie offener Mengen $\Omega_\lambda \subset \mathbb{C}$ ist offen, und der Durchschnitt einer endlichen Familie offener Mengen ist offen. Was gilt für abgeschlossene Mengen?

(b) Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge, deren Glieder sämtlich in A liegen, auch deren Grenzwert in A liegt.