

Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Lösung Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $n=1$.

$$\frac{1}{2} \stackrel{!}{<} \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n+1$.

Angenommen $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Zu zeigen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \stackrel{!}{<} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

Nach Induktionsannahme ist (da $\frac{2n+1}{2n+2} > 0$)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$$

also genügt es zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \stackrel{!}{<} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Da beide Seiten positiv sind, ist dies

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} < \frac{1}{2n+3}$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4$$

Da dies offenbar stimmt, ist die Behauptung bewiesen.

Zeige mit Hilfe der ε - δ Definition:

(a) f, g stetig in $x_0 \Rightarrow f+g$ stetig in x_0

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ nicht stetig in $a \in \mathbb{Z}$.

(a)

Sei $\varepsilon > 0$. Da f, g stetig sind, gibt es δ_1, δ_2 mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } x \in D, |x - x_0| < \delta_1$$

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } x \in D, |x - x_0| < \delta_2$$

Setze $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Dann gilt

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq$$

$$|f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon.$$

(b) Behauptung:

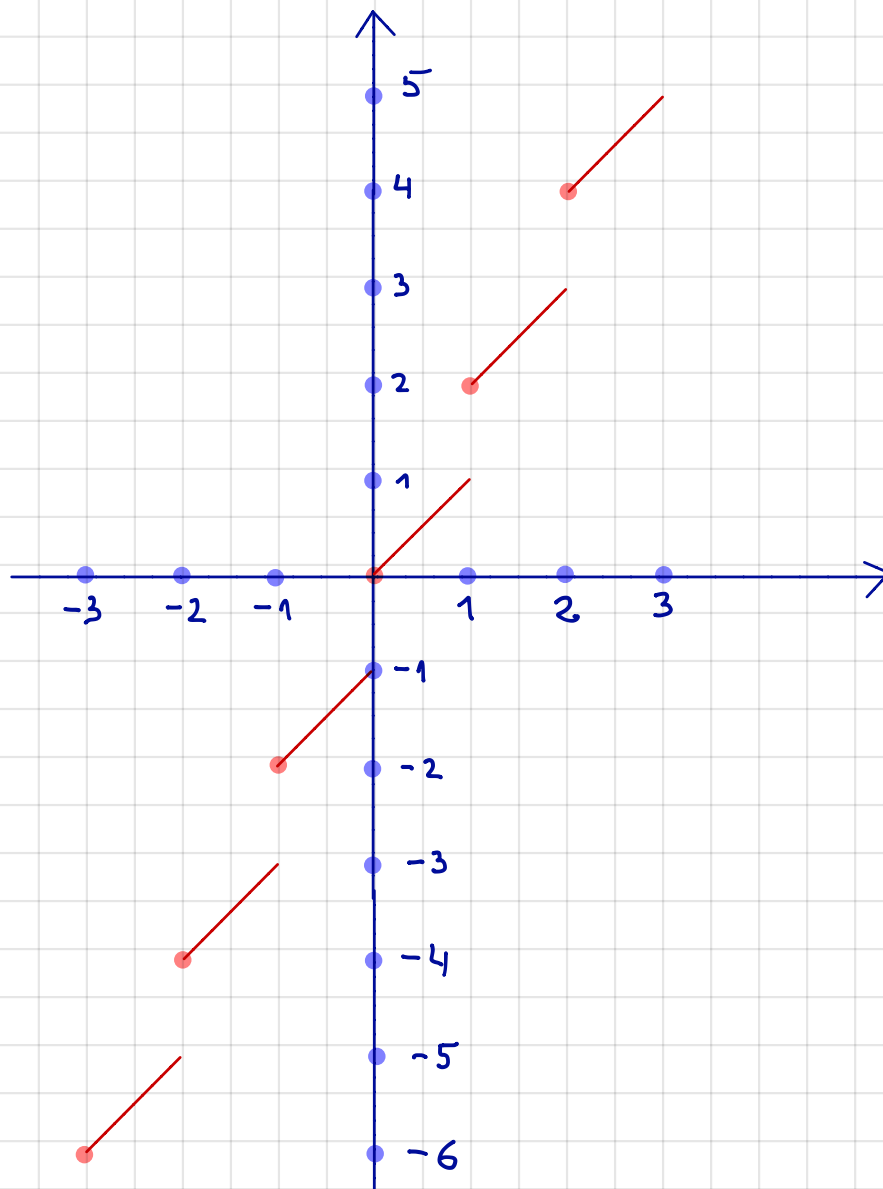
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \text{ mit } |x - a| < \delta \text{ und } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Für $a \in \mathbb{Z}$ gilt $f(a) = a + \lfloor a \rfloor = 2a$.

Für $x \in [a-1, a)$ gilt $f(x) = x + \lfloor x \rfloor = x + a - 1$

$$\begin{aligned} \leadsto |f(x) - f(a)| &= |x + a - 1 - 2a| = |x - a - 1| = \\ &= a + 1 - x > 1 \end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig wähle $x \in [a-1, a)$
mit $|x - a| < \delta \leadsto$ Behauptung.



(a) Bestimme den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(b) Zeige, dass die Reihe auf $\overline{B}_R(0)$ normal konvergiert und ihre Summe auf $\overline{B}_R(0)$ stetig ist.

Lösung (a) Die Koeffizienten der PR sind $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \neq 0$.

Es gilt

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{also } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1.$$

Alternativ, $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ und wegen $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$,

$$\sqrt[n]{n+1} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty \text{ gilt } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \leadsto R=1.$$

$$(b) \left\| \frac{z^n}{n(n+1)} \right\|_{\overline{B}_1(0)} = \frac{1}{n(n+1)} \sup_{\|z\| \leq 1} |z^n| = \frac{1}{n(n+1)} \leadsto$$

$$\sum_{n \geq 1} \left\| \frac{z^n}{n(n+1)} \right\|_{\overline{B}_1(0)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ konvergiert}$$

also konvergiert die Funktionenreihe normal auf $\overline{B}_1(0)$.

Da $\overline{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow \frac{z^n}{n(n+1)}$ stetig sind, ist die Summe der normal konvergenten Reihe stetig.

Bestimme die Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - (x+1)^2}{x^2}$$

Lösung

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty$$

da $e^{-y} \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$.

Es gilt

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$\text{und} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = x^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n x^{n-3}}{n!} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} x^n$$

wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} x^n$ Konvergenzradius ∞ hat.

Insbesondere ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} x^n$ stetig.

Es folgt

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 f(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x} - (x+1)^2}{x^2} &= \frac{1 + 2x + 2x^2 + x^3 f(x) - 1 - 2x - x^2}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + x^3 f(x)}{x^2} = 1 + x f(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sonst kann man zweimal l'Hospital anwenden:

Sei $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} - (x+1)^2$, $g(x) = x^2$.

f, g sind zweimal differenzierbar und

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2(x+1), \quad f''(x) = 4e^{2x} - 2$$

$$g'(x) = 2x, \quad g''(x) = 2$$

Es gilt $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ und $f'(0) = 0$, $g'(0) = 0$.

Außerdem $g'(x) \neq 0$, $g''(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.

Die Hypothesen bei l'Hospital sind erfüllt also gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - (x+1)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2}e^{2x} - \cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 1}{1} = 1.$$

Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)x^{3/2}$.

(a) Zeige, dass f zweimal differenzierbar auf $(0, \infty)$ ist und bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$. Existieren $f'(x)$, $f''(x)$ für $x=0$?

(b) Bestimme die Intervalle, auf denen f monoton ist und die lokalen und globalen Extremumstellen von f .

Lösung (a) Die Funktion $(0, \infty) \ni x \rightarrow x^z \in \mathbb{C}$ ist zweimal diffbar für alle $z \in \mathbb{C}$ also ist f auf $(0, \infty)$ zweimal diffbar als Produkt von $x \mapsto x-2$ und $x \mapsto x^{3/2}$.

$$f(x) = x^{5/2} - 2x^{3/2} \leadsto$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} - 2 \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{5}{2}x^{3/2} - 3x^{1/2}$$

$$f''(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{3}{2}x^{-1/2} = \frac{3}{2}x^{-1/2} \left(\frac{5}{2}x - 1 \right).$$

$f'(0)$ existiert und $f'(0)=0$, da

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = (x-2)x^{1/2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0$$

$f''(0)$ existiert nicht, da

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{\frac{5}{2}x^{3/2} - 3x^{1/2}}{x} = \underbrace{\frac{5}{2}x^{1/2}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{3x^{-1/2}}_{\rightarrow \infty} \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow 0.$$

(b) $f'(x) = x^{1/2} \left(\frac{5}{2}x - 3 \right)$ für $x > 0$.

Nullstellen und Vorzeichen der Ableitung:

Da $x^{1/2} > 0$ für $x > 0$, so gilt

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 5x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{6}{5},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \text{ oder } x = 0,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 5x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}.$$

$x = 6/5$ ist der einzige kritische Punkt (0 liegt am Rand)

Monotonie-Intervalle

Also ist f streng monoton fallend auf $[0, \frac{6}{5}]$,

streng monoton wachsend auf $[\frac{6}{5}, \infty)$.

Insbesondere gilt:

$$\forall x \in [0, 6/5]: f(0) \geq f(x) \geq f(6/5)$$

$$\forall x \in [6/5, \infty): f(6/5) \leq f(x)$$

Extremstellen

Daher ist $x = \frac{6}{5}$ das globale Minimum von f

und $x = 0$ ein lokales Maximum.

(das sieht man auch direkt: $f(0) = 0$ und $f(x) < 0$ für $x \in (0, 2)$).

Es gibt keine andere lokale Extrema auf $(0, \infty)$ da $x = 6/5$ der einzige kritische Punkt ist.

Variationstabelle:

x	0					$\frac{6}{5}$				
$f'(x)$	0	-	-	-	-	0	+	+	+	+
$f(x)$	0	$\searrow$				$f(\frac{6}{5})$	$\nearrow$			

6. Aufgabe

(8 Punkte)

Entscheide durch Ankreuzen, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Dabei sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, $a < b$ reelle Zahlen und $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

w f

1. ☐ ☒ Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergieren, so divergiert auch $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. ☒ ☐ Falls $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren, so konvergieren auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. ☐ ☒ Hat eine Potenzreihe den Konvergenzradius $R \in [0, \infty)$, so ist sie auch im Punkt R konvergent.
4. ☒ ☐ Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $\max\{f, g\}$ stetig.
5. ☐ ☒ Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.
6. ☐ ☒ Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$. Dann ist f streng monoton wachsend.
7. ☐ ☒ Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$.
8. ☐ ☒ Ist $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, so ist x_0 ein Sattelpunkt.

1. Falsch. Betrachte $a_n = n$, $b_n = -n$.
2. Wahr. Addiere und subtrahiere $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$.
3. Falsch. Betrachte die geometrische Reihe.
4. Wahr. $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$.
5. Falsch. Betrachte $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
6. Falsch. $f : \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$
7. Falsch. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$.
8. Falsch. Es fehlt die Hypothese $f'(x_0) = 0$. Gegenbeispiel: $f(x) = -x$, $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Viel Erfolg!

(Gesamtpunktzahl: 64 Punkte)