Analysis I – Klausurvorbereitung

1. Aufgabe
Beweise mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \,.$$

2. Aufgabe
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1 \quad , \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \,.$$

(a) Beweise, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 2 nach oben beschränkt ist.

(b) Beweise, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist.

(c) Beweise, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, und bestimme ihren Grenzwert.

Lösung Aufgabe 2:

(a) (Beweis mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$)
I.A. $n = 1 : x_1 = 1 \in (0, 2)$ ✓
I.S. $n \rightsquigarrow n + 1$:
Wir zeigen: Falls $x_n \in (0, 2)$, dann gilt auch $x_{n+1} \in (0, 2)$. Es gilt

$$x_n \in (0,2) \Rightarrow 2 < x_n + 2 < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{2} < \overbrace{\sqrt{x_n + 2}}^{=:x_{n+1}} < \sqrt{4} = 2 \checkmark$$

Dabei wurde die strenge Monotonie von $x \mapsto \sqrt{x}$ benutzt.

(b) Nach (a) gilt $x_n \in (0, 2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $x_n \in (0, 2) \Rightarrow x_n^2 < 2x_n < x_n + 2 \Rightarrow x_n^2 < x_{n+1}^2 \Rightarrow x_n < x_{n+1}$ (da beide > 0).
Alternativ: Betrachte $x_n^2 - x_{n+1}^2 = x_n^2 - x_n - 2 = (x_n + 1)(x_n - 2) < 0$ (die Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ hat Nullstellen -1 und 2). Also $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton (nach (b)) und beschränkt (nach (a)). Monotonieprinzip $\rightsquigarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Wegen $x_n \geq 1$ impliziert das Vergleichsprinzip dass $x \geq 1 > 0$. Außerdem $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$. Durch Limesübergang in $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ folgt

$$x^2 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (2 + x_n) = 2 + \lim_{n\to\infty} x_n = 2 + x$$

Schließlich $x^2 - x - 2 = 0$, also $x = -1$ oder $x = 2$. Da $x \geq 1$, folgt $x = 2$.

(bitte wenden)

3. Aufgabe
Bestimme alle Häufungswerte der Folgen mit den Folgengliedern

$$\text{(i) } a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} + i^{2n+1}\frac{n-1}{n+2} \qquad \text{(ii) } a_n = \sqrt[n]{2} + \cos(n\pi)\,.$$

Lösung Aufgabe 3:

(i) Es gilt

$$a_{2n} = \frac{2\sqrt{2n}}{2n+1} + i^{4n+1}\frac{2n-1}{2n+2} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{n}}}{2+\frac{1}{n}} + i\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \longrightarrow i\,, \quad n \longrightarrow \infty$$

und

$$a_{2n-1} = \frac{2\sqrt{2n-1}}{2n} + i^{4n-1}\frac{2n-2}{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - i\frac{2-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} \longrightarrow -i\,, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Sei nun $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$. Dann liegen unendliche viele gerade oder unendlich viele ungerade Zahlen in $(n_k)_{k\geq 1}$, also gibt es eine Teilfolge von $(a_{n_k})_{k\geq 1}$, die auch Teilfolge von $(a_{2n})_n$ bzw. $(a_{2n-1})_n$ ist und somit gegen i oder $-i$ konvergiert. Da $(a_{n_k})_k$ nach Voraussetzung konvergent ist, muss $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} i$ oder $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -i$ gelten, also gibt es außer i und $-i$ keine weiteren Häufungspunkte.

(ii) Zunächst ist $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Daher zerfällt die Folge (a_n) wie oben vollständig in die beiden Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) mit

$$a_{2n} = \sqrt[2n]{2} + (-1)^{2n} = \sqrt[2n]{2} + 1\,, \qquad a_{2n+1} = \sqrt[2n+1]{2} + (-1)^{2n+1} = \sqrt[2n+1]{2} - 1$$

Aber $\sqrt[k]{2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Wir schließen $a_{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$ und $a_{2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Insgesamt folgern wir wie bei (i): Die Folge zerfällt vollständig in zwei konvergente Teilfolgen, also sind deren Grenzwerte die einzigen Häufungspunkte. Die Folge $(a_n)_n$ hat also die beiden Häufungspunkte 2 und 0 und die Teilfolgen $(a_{2n})_n$ bzw. $(a_{2n+1})_n$ konvergieren gegen diese Häufungspunkte.

(bitte wenden)

4. Aufgabe
Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k\geqslant 2}(-1)^{k+1}\frac{k}{k^2-1}$$

konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Bestimme eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ so, dass jede Partialsumme s_n um höchstens $1/10$ vom Grenzwert der Reihe abweicht, falls $n \geqslant N$ ist.

Lösung Aufgabe 4:
Wir wollen das Leibnizkriterium anwenden. Setze $a_k = \frac{k}{k^2-1}$. Dann gilt $a_k \to 0$, $k \to \infty$ (Polynom von Grad 1 durch Polynom von Grad 2). Es ist also noch zu zeigen, dass die Folge $(a_k)_k$ monoton fällt. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
a_{k+1} - a_k &= \frac{k+1}{(k+1)^2-1} - \frac{k}{k^2-1} \\
&= \frac{(k+1)(k^2-1) - k\big((k+1)^2-1\big)}{k(k+2)(k+1)(k-1)} \\
&= \frac{(k^3+k^2-k-1)-(k^3+2k^2)}{k(k+2)(k+1)(k-1)} \\
&= -\frac{k^2+k+1}{k(k+2)(k+1)(k-1)} < 0\,,
\end{aligned}$$

da alle Ausdrücke im Zähler und Nenner dieses Bruches positiv sind, weil $k \geqslant 2$. Die Folge fällt also streng monoton. Eine Anwendung des Leibnizkriteriums liefert die Konvergenz der Reihe. Da

$$\frac{k}{k^2-1} \geqslant \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

und die harmonische Reihe $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum_{k\geqslant 1}|a_k|$ nach dem Minorantenkriterium. Die Reihe ist also nicht absolut konvergent. Sei s der Grenzwert der Reihe. Nach dem Leibnizkriterium gilt $|s-s_n| \leqslant a_{n+1}$. Zu finden ist also $N \in \mathbb{N}$ mit $a_{N+1} \leqslant 1/10$ also

$$\begin{aligned}
\frac{N+1}{(N+1)^2-1} \leqslant \frac{1}{10} &\iff 10(N+1) \leqslant (N+1)^2 - 1 \\
&\iff 0 \leqslant (N+1)^2 - 10(N+1) - 1 \\
&\iff 0 \leqslant (N-4)^2 - 26
\end{aligned}$$

(mit quadratischer Ergänzung). Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-4)^2 - 26$ ist nicht-negativ für $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$, wobei $x_1 = 4 - \sqrt{26}$ und $x_2 = 4 + \sqrt{26}$ sind die Nullstellen von f. Wir können also N die kleinste ganze Zahl größer als x_2 wählen. Da $5 < \sqrt{26} < 6$, gilt $9 < x_2 < 10$. Die Aussage ist also für $N = 10$ erfüllt.

(bitte wenden)

5. Aufgabe
Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \frac{k+1}{2^k}$$

absolut konvergiert. Beweise anschließend für die Partialsummen s_n der Reihe durch vollständige Induktion die Darstellung

$$s_n = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und nutze dieses Resultat zur Gewinnung der Summe s der Reihe.

Lösung Aufgabe 5:
Sei $a_k := (-1)^k \frac{k+1}{2^k}$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2}{k+1} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad k \longrightarrow \infty .$$

Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir, dass die Reihe absolut konvergiert. Die Formel für die Partialsummen zeigen wir mit Hilfe einer vollständigen Induktion: Für $k = 0$ haben zeigen wir den Induktionsanfang mit

$$s_0 = \frac{1}{9}(4+5) = 1 = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k \frac{k+1}{2^k} .$$

Im Induktionsschritt sei die Darstellung nun für $n \in \mathbb{N}$ korrekt (Induktionsvoraussetzung) und wir folgern damit die Formel entsprechend für $n+1$:

$$\begin{aligned} s_{n+1} = s_n + a_{n+1} &= \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right) + (-1)^{n+1}\frac{n+2}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{9}\left(4 - (-1)^{n+1}\frac{6n+10}{2^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{9n+18}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^{n+1}\frac{3(n+1)+5}{2^{n+1}}\right) . \end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2^n} = 0$ (Polynom durch Exponentialfunktion mit Basis > 1). Also folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right) = \frac{4}{9} .$$

(bitte wenden)

6. Aufgabe

Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\text{(a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^3+n} \quad , \quad \text{(b)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{i^n}{3^n(2n+1)} z^n \,.$$

Lösung Aufgabe 6:

(a) Erste Lösung: Sei $a_n := \frac{1}{n^3+n} \neq 0$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3+n+1}{n^3+n} = 1$$

als Quotient zweier Polynome dritten Grades mit jeweils Leitkoeffizient 1. Somit ist $R = 1$.
Zweite Lösung: Man benutzt die Cauchy-Hadamard Formel. Es ist $R = 1/q$ wobei

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3+n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3+n}} \,.$$

Wir bestimmen diesen Grenzwert nun in zwei Varianten.
Erste Variante (durch elementare Umformungen): Wegen $n \leqslant n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 < \sqrt[n]{n^3+n} \leqslant \sqrt[n]{2n^3} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n^3}\,. \qquad (\star)$$

Aber $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ also auch $1 = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^3 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3}$ und damit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n^3} = 1$. Einschließungsprinzip in $(\star)$ $\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n} = 1 \rightsquigarrow q = 1 \rightsquigarrow R = 1$.
Zweite Variante: Es gilt $\sqrt[n]{n^3+n} = \sqrt[n]{n^3}\,\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}$. Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n^3} \to 1$ für $n \to \infty$. Wir berechnen $\lim_{n\to\infty} x_n$, wobei $x_n := \sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}$. Schreibe

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n^3}} =: y_n^{z_n}$$

wobei $y_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$ und $z_n = \frac{1}{n^3} \to 0$. Dann gilt für $n \to \infty$

$$x_n = y_n^{z_n} = e^{z_n \log y_n} \to e^{0\cdot 1} = e^0 = 1$$

für $n \to \infty$ und damit $q = 1 \rightsquigarrow R = 1$.

(b) Sei $a_n := \frac{i^n}{3^n(2n+1)} \neq 0$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(2n+3)}{3^n(2n+1)} = 3$$

somit ist $R = 3$.
Alternativ kann man die Cauchy-Hadamard Formel benutzen. Es ist $R = 1/q$ wobei

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{i^n}{3^n(2n+1)}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n(2n+1)}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3\sqrt[n]{2n+1}}\,.$$

Es gilt $1 < \sqrt[n]{2n+1} \leqslant \sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ also $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1} = 1$, wegen des Einschließungsprinzips. Also $q = 1/3$ und $R = 3$.
Man kann alternativ $\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n}}$ berechnen, indem man so umformt

$$(2n+1)^{\frac{1}{n}} = (2n)^{\frac{1}{n}}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n^2}} \to 1\cdot e^0 = 1\,,\ n\to\infty\,.$$

7. Aufgabe
Für $s \in \mathbb{R}$ betrachte die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^s}$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Bestimme den Konvergenzradius.

(b) Sei $s > 1$. Zeige, dass die Potenzreihe normal konvergent in $\big\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z|\leq 1\big\}$ ist.

Lösung Aufgabe 7:

(a) Es gilt
$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)^s}{n^s} \to 1\,,\quad n\to\infty$$
somit ist $R = \lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}| = 1$.

(b) Sei $D = \big\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z|\leq 1\big\}$. Es gilt
$$\left\|\frac{z^n}{n^s}\right\|_D := \sup_{|z|\leq 1}\left|\frac{z^n}{n^s}\right| = \sup_{|z|\leq 1}\frac{|z|^n}{n^s} = \frac{1}{n^s}$$
also hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\|\frac{z^n}{n^s}\|_D$ die Majorante $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Da $s > 1$ ist die Majorante konvergent, also ist nach Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty}\|\frac{z^n}{n^s}\|_D$ konvergent.

(bitte wenden)

8. Aufgabe
Untersuche folgende Grenzwerte auf Existenz und bestimme sie gegebenenfalls:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,, \qquad \lim_{x\downarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}$$

Lösung Aufgabe 8:
Es ist für $x>0$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \sqrt{x^2+x}-x = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\,.$$

Es gilt $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion erhält man

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+1} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+1} = 1,$$

also $\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
Für $x>0$ ergibt die Definition des Cosinus mit Hilfe der Cosinusreihe

$$\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!}-1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{(2k)!}-1}{x} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{(2k)!}}{x}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{(2k+2)!} =: P(x)$$

Die Potenzreihe P hat den Konvergenzradius ∞ hat und somit auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Um dies einzusehen, kann man mit $a_k := \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \neq 0$ rechnen:

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{(2k+4)!}{(2k+2)!} = (2k+4)(2k+3) \to \infty\,, \quad k\to\infty.$$

also $R = \lim_{k\to\infty}|a_k/a_{k+1}| = \infty$. Der Stetigkeit von f impliziert

$$\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} \longrightarrow P(0) = a_0 = (-1)^1\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}\,, \quad x \searrow 0.$$

Zweite Lösung mit Hilfe des Satzes von l'Hospital: Seien $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(\sqrt{x})-1$, $g(x)=x$. Diese Funktionen sind stetig auf $[0,\infty)$ und differenzierbar auf $(0,\infty)$: $\cos$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und $x\mapsto\sqrt{x}$ differenzierbar auf $(0,\infty)$ (Vorsicht: aber nicht auf $[0,\infty)$!) also ist auch $x\mapsto\cos(\sqrt{x})$ differenzierbar auf $(0,\infty)$ als Verkettung differenzierbaren Funktionen. Ausserdem gilt $g'(x)=1\neq 0$ und $f(0)=g(0)=0$. Es gilt nach Kettenregel für $x>0$:

$$f'(x) = (\cos(\sqrt{x})-1)' = (\cos(\sqrt{x}))' = \cos'(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}).$$

Wir betrachten
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \to -\frac{1}{2}, \quad x \searrow 0,$$
mit der Substitution $y = \sqrt{x}$ (beachte $\sqrt{x} \to 0$, $x \to 0$) in den bekannten Grenzwert
$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$
Die Bedingungen des Satzes von von l'Hospital sind also erfüllt. Es folgt, dass
$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2}.$$
Andere Möglichkeit: Substitution $\sqrt{x} = y \rightsquigarrow x = y^2$ und $x \to 0 \rightsquigarrow y \to 0$ also
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2}$$
(wie oben, entweder Cosinusreihe oder l'Hospital, die Rechnungen sind aber einfacher, da keine Wurzel dabei ist).

9. Aufgabe

Zeige: Die Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = 20$ hat genau eine positive reelle Lösung x.

Lösung Aufgabe 9:

Existenz: Bekommt man mit Hilfe des Zwischenwertsatzes für die stetige Funktion (Polynom!) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$, da $f(0) = 0 < 20$ und $f(1) = 24 > 20$.

Zur Eindeutigkeit: f ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$, da $x > y \Rightarrow x+1 > y+1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x+3 > y+3$, was durch Multiplikation $f(x) > f(y)$ ergibt (falls $y \geqslant 0$; Ungleichheitszeichen bleiben erhalten falls alle Faktoren $\geqslant 0$ sind!). Also ist f injektiv auf $[0, \infty)$, d. h. es gibt höchstens eine Lösung.

10. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2$. Bestimme die lokalen und globalen Extrema von f.

Lösung Aufgabe 10:

Als Polynom dritten Grades ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Grenzwerte an den Endpunkten: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Wegen dieser Grenzwerte in $-\infty$ und $+\infty$ gibt es keine globalen Extrema.

Es gilt $f'(x) = 3x^2 + 2x$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$. Es gilt $f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$ und $f(0) = 0$.

Erste Variante:

Als Polynom zweiten Grades mit Leitkoeffizient $3 > 0$ ist $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$. In $x \in (x_1, x_2)$ ist $f'(x) < 0$ und dort f daher streng monoton fallend. Die Funktion f hat somit in $x = -\frac{2}{3}$ ein lokales Maximum und in $x = 0$ ein lokales Minimum.

Zur Veranschauung kann man sich eine Variationstabelle wie folgt aufstellen:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(diese ist ohne obige Rechnungen und Begündungen für eine Lösung nicht ausreichend!)

Zweite Variante:
f ist als Polynom zweimal differenzierbar. Wir haben $f''(x) = 6x + 2$ und $f''(x_1) = 6 \cdot -\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{18\cdot(-2)+6}{3} = -10 < 0$ und $f''(x_2) = 2 > 0$. $\rightsquigarrow$ f hat in $x = -\frac{2}{3}$ ein lokales Maximum und in $x = 0$ ein lokales Minimum.

11. Aufgabe
Entscheide durch Ankreuzen, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Lösung Aufgabe 11 :

w	f	
☐	$\boxed{\checkmark}$	Jede beschränkte Folge ist konvergent.
$\boxed{\checkmark}$	☐	Jede unbeschränkte Folge ist divergent.
$\boxed{\checkmark}$	☐	Jede konvergente Folge ist beschränkt.
☐	$\boxed{\checkmark}$	Jede divergente Folge ist unbeschränkt.
$\boxed{\checkmark}$	☐	Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, so gilt $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{\checkmark}$	☐	Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ hat eine konvergente Teilfolge.
$\boxed{\checkmark}$	☐	Wenn f stetig in x_0 ist, so ist $\lvert f\rvert$ stetig in x_0.
☐	$\boxed{\checkmark}$	Wenn $\lvert f\rvert$ stetig in x_0 ist, so ist f stetig in x_0.
$\boxed{\checkmark}$	☐	Ist f differenzierbar in x_0, dann ist f stetig in x_0.
☐	$\boxed{\checkmark}$	Ist f nicht differenzierbar in x_0, dann ist f unstetig in x_0.
☐	$\boxed{\checkmark}$	$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist lokales Extremum von f.
☐	$\boxed{\checkmark}$	Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$, dann ist f konstant.
$\boxed{\checkmark}$	☐	Der Satz von Rolle ist auf $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x - x^2$, anwendbar.
$\boxed{\checkmark}$	☐	$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1 - \cos z}{z^2} = \dfrac{1}{2}$.