WS 19/20 Marinescu/Zielinski

8. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 09.12.–10.12.19 in den Übungen

Bitte beachten Sie das folgende, geänderte Bewertungsschema:
Wählen Sie **eine** der Aufgaben und bearbeiten Sie diese. Alle anderen Aufgaben tragen **nicht** zu der für die Zulassung zur Klausur notwendigen Mindestanzahl an Punkten bei. Zusätzlich dürfen Sie wahlweise eine weitere der Aufgaben als Zusatzaufgabe bewerten lassen. Kennzeichnen Sie die Aufgabe, die als Zusatzaufgabe gewertet werden soll, ensprechend.

1. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n}$ berechne $\sup_{k\geq n} x_k$, $\inf_{k\geq n} x_k$, $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschänkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeige:

(i) $\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} x_k$ ist ein Häufungswert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und zwar der kleinste.

(ii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann wenn $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$. Ist das der Fall, so ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Seien $a, b, z \in \mathbb{C}$. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$

(ii) $1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + \ldots + a^nb^n + a^{n+1}b^n + \ldots$

(iii) $\displaystyle \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$

3. Aufgabe (12 Punkte)

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{C}$ sei eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_n = \alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Seien $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Die **hypergeometrische Reihe** zu a, b, c ist definiert durch

$$F_{a,b,c}(z) := \sum_{k\geqslant 0} \frac{a_k b_k}{k!\, c_k} z^k = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{2!\, c(c+1)} z^2 + \ \ldots$$

(bitte wenden)

(a) Berechne den Konvergenzradius von $F_{a,b,c}$.

(b) Drücke die folgenden Potenzreihen in der Form $F_{a,b,c}(\pm z)$ oder $z \cdot F_{a,b,c}(\pm z)$ aus:

(i) $\sum_{k \geqslant 0} z^k$,

(ii) $B_s(z) = \sum_{k \geqslant 0} \binom{s}{k} z^k$, mit $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$,

(iii) $L(z) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1}$.

4. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Zeige $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ und $\exp(x) < \exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

(b) Zeige $|\exp(u) - 1 - u| \leqslant |u|^2$ für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| < 1$ und folgere, dass

$$|\exp(w) - \exp(z) - (w - z)\exp(z)| \leqslant |w - z|^2 \cdot |\exp(z)|$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|w - z| < 1$.

(c) Beweise mit Hilfe von (b), dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist.

5. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Sei $a > 0$. Zeige, dass es eine einzige Funktion $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(1) = a$ und $\varphi(r + s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere

$$B_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n .$$

Zeige mit Hilfe des Cauchy–Produkts, dass $B_{\alpha+\beta}(z) = B_\alpha(z) B_\beta(z)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Leite für $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, her:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n .$$

Tipp zu (b): Zeige zunächst, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha + \beta}{n} .$$