1. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 21.10.–22.10.19 in den Übungen

1. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mit Hilfe der Körperaxiome und den daraus gezogenen Folgerungen in der Vorlesung, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ gilt:

(a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $ad = bc$,

(b) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$,

(c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Benutze nur die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome, die in der Vorlesung daraus gezogenen Folgerungen und Aufgabe 1, um zu zeigen:

(a) Aus $x > 0$ folgt $x^{-1} > 0$ und aus $x < 0$ folgt $x^{-1} < 0$.

(b) Für $a, b, c, d > 0$ mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gilt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x^2 - 9| + |x^2 - 16| < 47$?

Zusatzaufgabe (+ 8 Punkte)

(a) Zeige, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrational ist.

(b) Sei $a \in \mathbb{Q}_+$ mit $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. Zeige, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für alle $p/q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{a}\right| \geq \frac{c}{q^2}.$$