# 2. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 28.10.–29.10.19 in den Übungen

## 1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}\,, \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}\,.$$

(b) Zeige durch Induktion, dass für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt

$$|a_1 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + \ldots + |a_n|\,.$$

## 2. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimme für jede der folgenden Mengen, ob sie ein Supremum bzw. Infimum besitzt. Falls ja, berechne es und entscheide, ob es in der jeweiligen Menge enthalten ist.

(a) $M_1 = \left\{(-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$,

(b) $M_2 = \left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^m + \frac{5}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+a)(x+b)(x+c) > 0\}$, wobei $a < b < c$ fest.

## 3. Aufgabe (8 Punkte)

Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}\,,$$

(b) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\,.$$

## Zusatzaufgabe (+ 8 Punkte)

Zeige durch direkte Rechnung, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt:

(a) $\binom{m}{k} < \binom{n}{k}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$,

(b) $\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ für $k \in \{2, \ldots, n\}$,

(c) $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Tipp zu (c): Benutze den binomischen Lehrsatz und (b).