WS 19/20 Marinescu/Zielinski

# 3. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 04.11.–05.11.19 in den Übungen

## 1. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Zeige: Sind $k, n \in \mathbb{N}$, so ist $\sqrt[k]{n}$ ganzzahlig oder irrational.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Beweise, dass es $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$ gibt. Mit anderen Worten: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Tipp zu (a): Sei $\sqrt[k]{n} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Folgere $q = 1$ mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

## 2. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Wegen der Bernoulli–Ungleichung gilt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeige, dass außerdem gilt: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$.

(c) Folgere aus (a) und (b): $3\left(\frac{n}{3}\right)^n \leqslant n! \leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Tipp zu (a): Binomischer Lehrsatz, endliche geometrische Reihe und Zusatzaufgabe Blatt 2.

## 3. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Zeige: Für $a > 1$ ist $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \ldots > 1$, und für $0 < a < 1$ ist $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \ldots < 1$.

(b) Sei $x > 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $x^{-n} := (x^{-1})^n$, und für $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ sei $x^{\frac{k}{m}} := \sqrt[m]{x^k}$ definiert. Damit ist also $x^q$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$ erklärt. (Warum ist dies eindeutig?)
Zeige für $x > 0$ und $q, r \in \mathbb{Q}$: $x^q x^r = x^{q+r}$ und $(x^q)^r = x^{qr}$.

(bitte wenden)

**Zusatzaufgabe** (+ 12 Punkte)

Für positive Zahlen $a, b$ definiert man das **arithmetische, geometrische** und **harmonische Mittel** durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}\,, \quad G(a,b) := \sqrt{ab}\,, \quad H(a,b) := \frac{1}{A(\frac{1}{a},\frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}\,.$$

(a) Beweise die Ungleichungen

$$H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b)$$

und zeige, dass eine Gleichheit der Mittel nur für $a = b$ eintritt.

(b) **[Das arithmetisch–geometrische Mittel.]**
Es sei $0 < a < b$. Man definiere Intervalle $[a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch $[a_1, b_1] := [a, b]$ sowie durch

$$a_{n+1} := G(a_n, b_n) \quad \text{und} \quad b_{n+1} := A(a_n, b_n)\,.$$

Man zeige, dass sie eine Intervallschachtelung bilden.
Man zeige ferner die Abschätzung

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{8a}(b_n - a_n)^2\,.$$

Die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegende Zahl heißt **arithmetisch–geometrisches Mittel** der Zahlen $a$ und $b$ und wird mit $M(a,b)$ bezeichnet.