WS 19/20 Marinescu/Zielinski

5. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 18.11.–19.11.19 in den Übungen

1. Aufgabe (8 Punkte)

Beschreibe und skizziere folgende Mengen:

(a) $M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - i| = |z - 1| \right\}$,

(b) $M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z + i| + |z - i| = 4 \right\}$,

(c) $M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im} \frac{z + i}{z + 1} = 0 \right\}$,

(d) $M_4 = \left\{ \frac{i - t}{t - 1} \in \mathbb{C} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Zeige:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$, wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt ist,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, wobei $a \in \mathbb{R}_+$ beliebig, aber fest gewählt ist,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) $x_n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $\lim x_n \geq e$.

(b) Für $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq m < n$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

(bitte wenden)

(c) Folgere, dass $e \geq x_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt und schließe daraus, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = e$.

Tipp zu (a): Benutze die Zusatzaufgabe von Blatt 2.

Zusatzaufgabe (+ 8 Punkte)

Sei $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

(a) Zeige (ähnlich wie in der Vorlesung bei der Abschätzung von x_n nach oben), dass für $m > n$ gilt $0 < x_m - x_n < \frac{1}{n!\,n}$.

(b) Folgere, dass $0 < e - x_n \leq \frac{1}{n!\,n}$.

(c) Berechne e bis auf 10^{-3} genau.

(d) Zeige, dass e irrational ist.

Tipp zu (d): Benutze (b) für einen Widerspruchsbeweis.