9. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 16.12.–17.12.19 in den Übungen

1. Aufgabe (12 Punkte)

Zeige für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,\ \ \sin(z+w) = \cos z \sin w + \sin z \cos w.$

(b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1,\ \ \cos 2z = 2\cos^2 z - 1,\ \ \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1+\cos z}{2},\ \ \sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1-\cos z}{2}.$

(c) $\cos z + \cos w = 2\cos\frac{z+w}{2}\cos\frac{z-w}{2},\ \ \sin z + \sin w = 2\sin\frac{z+w}{2}\cos\frac{z-w}{2}.$

Tipp zu (a): Für alle $u \in \mathbb{C}$ gilt, dass $\cos u + i \sin u = \exp(iu)$. Betrachte $u = z + w$ und $u = -(z+w)$.

2. Aufgabe (12 Punkte)

Finde die Stetigkeits- und Unstetigskeitsstellen folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

(c) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $\varphi(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$

(d) $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $\psi(x) = |\varphi(x) - x|$

3. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ und $a_0 < 0$. Zeige:
Das Polynom $p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ besitzt eine positive Nullstelle.

(b) Zeige, dass die Gleichung $x^2 + 2 = \exp(x)$ eine positive Lösung besitzt.

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(c) $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

(d) $\cosh : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig, hat Bild $[1, \infty)$ und ist streng monoton wachsend. (Also: $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ ist bijektiv.)

Tipp zu (c), (d): Zeige Surjektivität jeweils mit dem Zwischenwertsatz.

(bitte wenden)

4. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $x \in (-1,1)$ fest.

(a) Sei $m > 0$ und $\alpha \in [-m,m]$. Zeige, dass $\left|\binom{\alpha}{k}\right| \leqslant \binom{m+k-1}{k}$ und die Reihe $\sum_{k\geqslant 0} \binom{m+k-1}{k}|x|^k$ konvergent ist.

(b) Zeige, dass die Funktionenreihe $\sum_{k\geqslant 0} f_k$, wobei

$$f_k : [-m,m] \to \mathbb{R}, \text{ mit } f_k(\alpha) = \binom{\alpha}{k} x^k \,,$$

normal konvergent ist. Leite her, dass die Funktion $[-m,m] \ni \alpha \mapsto B_\alpha(x)$ stetig ist.

(c) Beweise die Binomialentwicklung von Newton:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,\ x \in (-1,1)\,.$$