10. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 07.01.20 in den Übungen

Übungsgruppen, die am Montag stattgefunden hätten, verteilen sich bitte wie folgt auf die am Dienstag stattfindenden Gruppen und reichen bei den entsprechenden Übungsleitern dort auch ihre Lösungen ein:

- Gruppen 1 $\Rightarrow$ Gruppe 8
- Gruppen 2, 3 $\Rightarrow$ Gruppe 9
- Gruppen 4 $\Rightarrow$ Gruppe 10
- Gruppen 5 $\Rightarrow$ Gruppe 11
- Gruppen 6 $\Rightarrow$ Gruppe 12
- Gruppen 7 $\Rightarrow$ Gruppe 13

Diejenigen, die Überschneidungen mit anderen Veranstaltungen haben und sich daher nicht entsprechend der Zuordnung einteilen können, gehen bitte wahlweise in eine der Gruppen 8, 14 oder 15.

1. Aufgabe (12 Punkte)

Für $x > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $x^z := \exp(z \cdot \log x)$. Zeige:

(a) Die Funktionen $\mathbb{R}_+ \ni x \overset{f_z}{\mapsto} x^z \in \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \ni z \overset{g_x}{\mapsto} x^z \in \mathbb{C}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ sind stetig.

(b) Für alle $x > 0$, $q \in \mathbb{Q}$ stimmt die obige Definition von x^q mit der Definition aus der Vorlesung (Skript Definition 1.5.8) überein.

(c) Für alle $x, y > 0$, $z, w \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ gelten:

$$(xy)^z = x^z y^z\,, \qquad x^{z+w} = x^z x^w \qquad \text{und} \qquad (x^a)^z = x^{az}\,,$$

für $x > 1$ und $a < b$ gilt $x^a < x^b$ und für $a > 0$ und $x < y$ gilt $x^a < y^a$.

2. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $a > 0$. Berechne die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \log x\,,\quad \lim\limits_{x\to\infty} \log x\,,\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\,,\quad \lim\limits_{y\to\infty}(1+\tfrac{1}{y})^y\,.$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x\,,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x\,,\quad \lim\limits_{x\to 0} x^a\,,\quad \lim\limits_{x\to\infty} x^a\,,\quad \lim\limits_{x\to 0} x^a \log x\,,\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log x}{x^a}\,.$

(c) $\lim\limits_{z\to\infty} P(z)$, wobei $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$.

(bitte wenden)

3. Aufgabe (12 Punkte)

Zeige:

(a) Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$. Dann konvergiert $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ absolut.

(b) Für jedes $\epsilon > 0$ ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mit $f_n(s) := \frac{1}{n^s}$ auf $D_\epsilon := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s \geq 1 + \epsilon\}$ normal konvergent und $\zeta : \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1\} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

(c) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zwei stetige Funktionen mit $f(q) = g(q)\ \forall q \in \mathbb{Q}$, so gilt $f = g$.

(d) Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass jedes $z_0 \in D$ besitze eine Umgebung U in D mit $f|_U : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f stetig.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$. Eine Teilmenge $U \subset D$ heißt Umgebung von z_0 in D, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(z_0) \cap D \subset U$. Zeige:

(a) Ist U eine Umgebung von z_0 in D und $U \subset V$, so ist auch V eine Umgebung von z_0 in D.

(b) Sind U, V zwei Umgebungen von z_0 in D, so ist es auch $U \cap V$.

(c) $f : D \to \mathbb{C}$ ist stetig in $z_0 \iff$ zu jeder Umgebung V von $f(z_0)$ gibt es eine Umgebung U von z_0 mit $f(U) \subset V$.