11. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 13.01.–14.01.20 in den Übungen

1. Aufgabe (12 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt: Ist $1 \leq m \leq 2^n$ und $x \in [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]$, so sei $f_n(x) := x - \frac{m-1}{2^n}$ für ungerades m und $f_n(x) := \frac{m}{2^n} - x$ für gerades m. Man überzeugt sich leicht, dass f_n wohldefiniert und stetig ist.

(a) Skizziere f_1 , f_2 , f_3 , f_4 und $\sum_{k=1}^{4} f_k$.

(b) Zeige, dass $f := \sum_{k=1}^{\infty} f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist.

(c) Sei $g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Seien $a_n \to x_0$ und $b_n \to x_0$ Folgen in I mit $a_n \leq x_0 \leq b_n$ und $a_n < b_n$ für alle n. Zeige: $d_n := \frac{g(b_n)-g(a_n)}{b_n-a_n} \to g'(x_0)$ für $n \to \infty$.

Tipp: Mit $g(x) = g(x_0) + r(x)(x - x_0)$ liegt d_n zwischen $r(a_n)$ und $r(b_n)$, warum?

(d) Sei nun $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ wie in (b) und $x_0 \in [0,1]$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $[a_n, b_n]$ ein Intervall der Form $[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]$ (wie oben), das x_0 enthält. Zeige: $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ ist für gerades n gerade und für ungerades n ungerade, und f ist in x_0 nicht differenzierbar.

2. Aufgabe (12 Punkte)

Berechne jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$(i)\quad f_1 : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{-d}{c}\} \ni x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{C}\,,\ \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{C}\ ,\,, c \neq 0$$

$$(ii)\quad f_2 : \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x \log x \in \mathbb{R}\ ,$$

$$(iii)\quad f_3 : \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^x \in \mathbb{R}\ ,$$

$$(iv)\quad f_4 : \mathbb{R} \ni x \mapsto \log \sqrt{1+\sin^2 x} \in \mathbb{R}\ ,$$

$$(v)\quad f_5 := \tanh = \frac{\sinh}{\cosh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

wobei $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Tipp: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Sei $z \in \mathbb{C}$, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) := 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) := x^z$ für $x > 0$. Zeige: f ist genau dann im Punkt 0 differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} z > 1$ gilt.

(bitte wenden)

3. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{C}$, und sei $\overline{D}$ die Vereinigung von D und der Menge aller Häufungspunkte von D. Beweise, daß $\overline{D}$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die D umfasst.
(Zu zeigen ist: $\overline{D}$ ist abgeschlossen, und jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{C}$, die D umfasst, umfasst auch $\overline{D}$.)

(b) Seien $D_1, \ldots, D_m \subset \mathbb{C}$ und seien $f_k : D_k \to \mathbb{C}$ ($1 \leqslant k \leqslant m$) stetige Funktionen mit der Eigenschaft $f_i(x) = f_j(x)$ für alle $x \in D_i \cap D_j$. Man kann also $f : \bigcup_{k=1}^{m} D_k \to \mathbb{C}$ durch $f(x) := f_k(x)$ für $x \in D_k$ definieren. Zeige: Wenn $D_1, \ldots, D_m$ offene Mengen sind, so ist f stetig.

(c) Kann man in (b) die Voraussetzung über die Offenheit der Mengen D_k fortlassen?