WS 19/20 Marinescu/Zielinski

(Dies ist das letzte Übungsblatt!)

**12. Blatt zur Analysis I**

Abgabe: 20.01.–21.01.20 in den Übungen

**1. Aufgabe** (12 Punkte)

(a) Zeige, dass die Funktion $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv ist.

(b) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ bezeichne die inverse Funktion von $\cos$. Zeige, dass $\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$ differenzierbar ist, und berechne die Ableitung.

(c) Zeige, dass $\arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2 \arctan x$ für alle $x \in [0, \infty)$.

**2. Aufgabe** (12 Punkte)

Die Funktion $f$ sei definiert durch

$$f : \Big[-\frac{1}{2}, \infty\Big) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{4}{x+1}.$$

Bestimme alle lokalen und globalen Extrema von $f$.

**3. Aufgabe** (12 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wieviele Nullstellen hat die Funktion $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + a$ in $(-1, 1)$?

(b) Sei $I = (a, b)$, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, und sei $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Zeige: $f(x) + f'(x)(y - x) < f(y)$ für alle $x \neq y$ in $I$. Folgere:

(i) $e^y > 1 + y$ für alle $y \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

(ii) $\alpha x^{\alpha-1}(x - y) > x^\alpha - y^\alpha > \alpha y^{\alpha-1}(x - y)$ für alle $x \neq y$ in $\mathbb{R}_+$ und $\alpha > 1$.

**4. Aufgabe** (12 Punkte)

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Zeige, dass es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit $\cos \phi = x$ und $\sin \phi = y$ gibt.

(b) Schließe aus (a): Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es $r \geq 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$, so dass $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) = re^{i\phi}$; dabei gilt $r = |z|$, und $\phi$ ist im Falle $z \neq 0$ eindeutig bestimmt bis auf die Addition von Elementen aus $2\pi\mathbb{Z}$. (Die $(r, \phi)$ heißen *Polarkoordinaten* für $z = re^{i\phi}$.)