Analysis II – Klausurvorbereitung

1. Aufgabe

Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^3$.

(a) Zeige, dass die Folge $(f_n)_n$ auf jeder beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Lösung:

Vorbemerkung: $(f_n)_n$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann existiert $a > 0$ mit $A \subset [-a, a]$.
Es gilt für alle $x \in A$,

$$\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^3 - 1\right| = \left|\frac{3x}{n} + \frac{3x^2}{n^2} + \frac{x^3}{n^3}\right| \leq \frac{3|x|}{n} + \frac{3|x|^2}{n^2} + \frac{|x|^3}{n^3} \leq \frac{3a}{n} + \frac{3a^2}{n^2} + \frac{a^3}{n^3} =: a_n$$

Es gilt $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt $a_n < \varepsilon$.
Die Konvergenz von a_n und die obige Abschätzung ergeben:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n(\varepsilon)\ \forall\, x \in A : \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^3 - 1\right| < \varepsilon.$$

Somit konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig auf A gegen die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ für alle $x \in A$.

(b) Angenommen $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Die Grenzwertfunktion müsste $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, da $f_n \to f$ punktweise auf $\mathbb{R}$.
Laut Definition der gleichmäßigen Konvergenz mit $\varepsilon = 6$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^3 - 1\right| < 6.$$

Wählt man $x = n$ für ein $n \geq n_0$, so folgt $7 < 6$. Widerspruch.

2. Aufgabe

(a) Definiere die Begriffe kompakter metrischer Raum und kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes.

(b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge $\{a\} \times K = \{(a, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in K\}$ kompakt ist.

(c) Seien a und K wie in (b). Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge mit $\{a\} \times K \subset U$. Zeige, dass $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times K \subset U$.

Lösung:
(a) Sei X ein metrischer Raum. X heißt ***kompakt***, wenn jede Folge in X einen Häufungswert hat. Eine *Teilmenge* $K \subset X$ heißt *kompakt*, falls der metrische Raum $(K, d|_K)$ kompakt ist, d. h. jede Folge in K einen Häufungswert in K hat.

(b) Sei $(x_k)_k$ eine Folge in $\{a\} \times K$.
Dann gibt es für alle k Punkte $y_k \in K \subset \mathbb{R}^n$, so dass $x_k = (a, y_k)$.
K kompakt $\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge $(y_{k_\ell})_\ell$ von $(y_k)_k$ mit $y_{k_\ell} \to y \in K$, $\ell \to \infty$.
Dann gilt auch $x_{k_\ell} = (a, y_{k_\ell}) \to (a, y) =: x \in \{a\} \times K$, $\ell \to \infty$. Somit hat jede Folge $(x_k)_k$ in $\{a\} \times K$ einen Häufungswert in $\{a\} \times K$, also ist $\{a\} \times K$ kompakt.
Andere Lösung: Man zeigt, dass $\{a\} \times K$ abgeschlossen und beschränkt ist
Abgeschlossenheit: Sei $(x_k, y_k)_k$ eine Folge in $\{a\} \times K$ mit $(x_k, y_k) \to (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$ ($\iff$ $x_k \to x$ und $y_k \to y$). Aus $(x_k, y_k) \in \{a\} \times K$ folgt $x_k = a$ für alle k also auch $x = a$. Da $y_k \to y$, $y_k \in K$ und K abgeschlossen ist, so ist $y \in K$. Insgesamt $(x, y) = (a, y) \in \{a\} \times K$.
Beschänktheit: K ist beschränkt, also existiert $M \in \mathbb{R}$ mit $\|y\|_\infty \leq M$ für alle $y \in K$. Dann gilt $\|(a, y)\|_\infty \leq \max\{|a|, M\}$ für alle $y \in K$.

(c) Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Punkt
$$(a_k, y_k) \in \left[\left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right) \times K\right] \setminus U.$$
K kompakt $\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge $(y_{k_\ell})_\ell$ von $(y_k)_k$ mit $y_{k_\ell} \to y \in K$, $\ell \to \infty$.
Somit $(a_{k_\ell}, y_{k_\ell}) \to (a, y) \in K$, $\ell \to \infty$.
Da $(a, y) \in \{a\} \times K \subset U$ und U ist offen, so ist U eine Umgebung von (a, y).
Es folgt, dass $(a_{k_\ell}, y_{k_\ell}) \in U$ für fast alle ℓ.
Widerspruch zu $(a_k, y_k) \notin U$ für alle k.

3. Aufgabe
Bestimme eine Lösung $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zum Anfangswertproblem
$$x'(t) = \frac{1 + e^{x(t)}}{e^{x(t)}} \cos(t), \quad x(0) = 1.$$
Überprüfe durch Einsetzen, ob die gefundene Funktion wirklich eine Lösung ist.

Lösung:
Trennung der Variablen gibt
$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^x} = \int \cos(t) dt.$$
Bestimmung der Stammfunktionen (z.B. mit Substitution $y = e^x$, $dy = e^x dx$) führt zu
$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^x} = \int \frac{dy}{1 + y} = \log(1 + y) + C_1 = \log(1 + e^x) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos(t)dt = \sin(t) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

also $\log(1+e^x) = \sin(t) + C_2 - C_1$ bzw.

$$1 + e^x = Ce^{\sin(t)}, \quad C \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Auflösen nach x ergibt dann

$$x(t) = \log\left(Ce^{\sin(t)} - 1\right).$$

Berücksichtigt man den Anfangswert erhält man $C = 1 + e$.
Wegen $1 + e > e \geq e^{-\sin(t)}$, $t \in \mathbb{R}$ ist $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert.
Einsetzen in die Gleichung

$$x'(t) = \frac{(1+e)\cos(t)e^{\sin(t)}}{(1+e)e^{\sin(t)} - 1} = \cos(t)\frac{e^{x(t)} + 1}{e^{x(t)}},$$

zeigt, dass x die DGL löst.

4. Aufgabe
Berechne die lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + 12xy^2 - 3x + 10$$

auf der Menge

$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{12} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Lösung Berechne die kritischen Punkte:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 + 12y^2 \\ 24xy \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \text{ in den Punkten } \Rightarrow \quad (\pm 1, 0), \ \left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$$

Alle vier kritischen Punkte liegen in E und müssen weiter untersucht werden.
Berechne die Hessematrix und setzte die kritischen Punkte ein:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 24y \\ 24y & 24x \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \text{ hat die Eigenwerte } 6 \text{ und } 24 \ \Rightarrow \text{positiv definit}$$

$$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} \text{ hat die Eigenwerte } -6 \text{ und } -24 \ \Rightarrow \text{negativ definit}$$

Also ist $(1,0)$ ein strenges lokales Minimum mit $f(1,0) = 8$ und $(-1,0)$ ist ein strenges lokales Maximum mit $f(-1,0) = 12$

$$H_f(0, \pm\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 12 \\ \pm 12 & 0 \end{pmatrix}, \text{ hat die Eigenwerte } \pm 12 \Rightarrow \text{indefinit}$$

Also gibt es in $(0, \pm\frac{1}{2})$ keine lokalen Extremstellen.
Als nächstes untersuchen wir die Extremstellen auf dem Rand. Sei $c : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ $c(t) := (\sqrt{12}\cos t, \sin t)$, eine Parametrisierung des Randes.

$$\begin{aligned}
(f \circ c)(t) &= \sqrt{12} \cdot 12\cos^3 t + \sqrt{12} \cdot 12\cos t \sin^2 t - 3\sqrt{12}\cos t + 10 \\
&= \sqrt{12}(12\cos t(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}) - 3\cos t) + 10 \\
&= 18\sqrt{3}\cos t + 10 \\
(f \circ c)'(t) &= -18\sqrt{3}\sin t
\end{aligned}$$

Die Funktion hat kritische Stellen bei $t = 0, \pi$.

$$(f \circ c)''(t) = -18\sqrt{3}\cos t \quad \Rightarrow \quad (f \circ c)(0) < 0 \text{ und } (f \circ c)(\pi) > 0$$

$c(0) = (\sqrt{12}, 0)$ ist ein lokales Maximum von f auf dem Rand von E mit Wert $f(\sqrt{12}, 0) = 18\sqrt{3} + 10 \approx 41 > 12$ und $c(\pi) = (-\sqrt{12}, 0)$ ist ein lokales Minimum von f auf dem Rand von E mit Wert $f(-\sqrt{12}, 0) = -18\sqrt{3} + 10 \approx -21 < 8$.
Das Minimum und das Maximum auf dem Rand sind auch das globale Minimum und Maximum, wie man durch Vergleich der Werte erkennt.

Eine andere Parametrisierung (der oberen Halbellipse), die sehr rasch zur Ergebnis führt, ist

$$c : [-\sqrt{12}, \sqrt{12}] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = \left(t, \sqrt{1 - \frac{t^2}{12}}\right).$$

Dann gilt $(f \circ c)(t) = 9t + 10$, das Maximum ist also für $t = \sqrt{12}$ angenommen und das Minimum für $t = -\sqrt{12}$ angenommen. Das selbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir die untere Halbellipse parametrisieren.

Lösung mit der Multiplikatorregel Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{12} + y^2 - 1$. Die Nebenbedingung ist $\varphi(x, y) = 0$.

$$\operatorname{grad}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad}\varphi(x, y) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{auf } \partial E = \varphi^{-1}(0)$$

Das System $\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = 0$ lautet

$$3x^2 + 12y^2 - 3 = \frac{1}{6}\lambda x, \quad 24xy = 2\lambda y, \quad \varphi(x, y) = 0$$

$24xy = 2\lambda y \rightsquigarrow (12x - \lambda)y = 0 \rightsquigarrow y = 0$ oder $12x = \lambda$
$y = 0 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{12} \rightsquigarrow$ Lösungen $(\pm\sqrt{12}, 0)$
$12x = \lambda \rightsquigarrow 3x^2 + 12y^2 - 3 = 2x^2 \rightsquigarrow x^2 + 12y^2 = 3 \rightsquigarrow \frac{x^2}{12} + y^2 = \frac{1}{4}$ Andererseits $\frac{x^2}{12} + y^2 = 1$. Daher sind die einzigen Kandidaten $(\pm\sqrt{12}, 0)$.

Es gilt $f(\sqrt{12},0) = 18\sqrt{3}+10 \approx 41 > 12$ und $f(-\sqrt{12},0) = -18\sqrt{3}+10 \approx -21 < 8$. Daher wird das globale Maximum von f auf E in $(\sqrt{12},0)$ angenommen und das globale Minimum von f auf E in $(-\sqrt{12},0)$ angenommen.

5. Aufgabe
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-3 \\ x^2-3xy+2z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeige, dass f stetig differenzierbar ist und berechne die Jacobi-Matrix J_f.

(b) Zeige, dass die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ in der Nähe von $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$ in der Form $(y,z) = (g_1(x), g_2(x))$ mit stetig differenzierbaren Funktionen g_1, g_2 auflösbar ist.

(c) Berechne $g_1(1)$, $g_2(1)$, $g_1'(1)$ und $g_2'(1)$.

Lösung: (a) Die Komponenten f_1 und f_2 von f sind Polynome also stetig differenzierbar.
Es gilt

$$J_f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-3y & -3x & 4z \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt $f(1,1,1) = (0,0)$ und

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ -3x & 4z \end{pmatrix}$$

also ist

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}\Big|_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

invertierbar wegen

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = 14 \neq 0$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt die Behauptung.

(c) Wegen $(1,1,1) \in \mathrm{Graph}(g_1,g_2)$ gilt $g_1(1) = g_2(1) = 1$.
Ausserdem

$$\begin{pmatrix} g_1'(1) \\ g_2'(1) \end{pmatrix} = -\left[\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}\Big|_{(1,1,1)}\right]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix}\Big|_{(1,1,1)} = -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$