Analysis 2 – Sommer 2016 – Nachklausur 4. 10. 2016

Aufgabe 1 **12=3+5+4 Punkte**

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$$

für alle x mit $|x| < R$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

für alle x mit $|x| < 1$ gilt.

Aufgabe 2 **6=3+3 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\frac{5}{2}}}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \text{ falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
Hinweis: Sie können z.B. $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ *benutzen.*

b) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3 **11 Punkte**

Sei $n > 2$. Bestimmen Sie das Maximum der Funktion

$$f(x) := \sin x_1 + \ldots + \sin x_n$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2\pi, \quad 0 \leq x_j \leq \pi, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Hinweis: $2 \sin \frac{x}{2} > \sin x, \ \forall x \in (0, \pi)$

Aufgabe 4 **13=4+2+3+3+1 Punkte**

Betrachten Sie die Vektorräume

$$\mathcal{B} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt}\} \qquad \text{und}$$
$$\mathcal{K} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent}\}$$

und die Abbildung $\mathcal{B} \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Die Vektorraumstruktur auf $\mathcal{B}$ und $\mathcal{K}$ sind gegeben durch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.
Hinweis: Dass $\mathcal{B}$ ein Vektorraum ist, dürfen Sie voraussetzen.

b) Begründen Sie kurz, warum $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.
Hinweis: Dass $\mathcal{K}$ ein Vektorraum ist, dürfen Sie voraussetzen.

c) Beweisen Sie, $\mathcal{B}$ ist ein Banachraum.

d) Beweisen Sie, $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$ ist abgeschlossen.

e) Begründen Sie kurz, dass $\mathcal{K}$ vollständig ist.

Aufgabe 5 **6=2+4 Punkte**

a) Formulieren Sie den Umkehrsatz.

b) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + e^y \\ x - y \end{pmatrix}$$

in einer Umgebung von $(0, 0)$ invertierbar ist, und berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Umkehrfunktion im Punkt $f(0, 0) = (2, 0)$.
