Großübungen am 10. und 14.07.2020

1. Aufgabe
Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichungen

a) $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$, $y \in \mathbb{R}$,

b) $y' = 3(\text{sgn}y)|y|^{\frac{2}{3}}$, $y \in \mathbb{R}$,

c) $y' = e^y \cos x$,

d) $y' = \sqrt{1-y^2}$, $|y| < 1$,

e) $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$, $0 < y < 1$,

f) $y' = (a^2 + x^2)(b^2 + y^2)$, $a, b > 0$,

g) $(1-x^2)y' - xy + 1 = 0$, $|x| < 1$.

2. Aufgabe
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := (e^x, \sin(x + y))$

a) In der Nähe welcher Punkte ist f invertierbar und hat eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung?

b) Berechne die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung in den in a) genannten Punkten.

3. Aufgabe
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = xye^{-x-y}$.

a) In der Nähe welcher Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ lässt sich die Bedingung $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ gemäß dem Satz über implizite Funktionen in der Form $y = g(x)$ bzw. $x = \tilde{g}(y)$ auflösen?

b) Berechne jeweils $J_g(x_0)$ bzw. $J_{\tilde{g}}(y_0)$.

4. Aufgabe
Bestimme die globalen Extrema von $f(x, y) := x^3 - 18x + 12y^2 - 144y + 24xy$ auf dem Bereich $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 10\}$.

5. Aufgabe
Bestimme die globalen Extrema von $f(x, y) := 4x^2 - 3xy$ auf dem Bereich $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.