1. Blatt zur Analysis 2 Abgabe: 29.04. bei ILIAS
Nur Augabe 1 soll abgegeben werden.

1. Aufgabe (12 Punkte)
Berechne mithilfe der Substitutionsregel die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$ auf $(0,1)$,

(b) $\displaystyle\int 9\sqrt{\frac{\operatorname{arsinh} 6x}{1+36x^2}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{4x\arctan(x^2)}{1+x^4}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$ auf $\mathbb{R}_+$,

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx$ mit $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Tipp zu (f): $y = \tan x$.

2. Aufgabe

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Bestimme $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ auf zwei Weisen:
   (i) durch mehrmalige partielle Integration,
   (ii) durch Einsetzen der Definition von $\cos$.

(b) Bestimme $\int \cos(\ln x)\,dx$ auf $\mathbb{R}_+$ auf zwei Weisen:
   (i) durch mehrmalige partielle Integration,
   (ii) mithilfe der Substitutionsregel und Teil (a).

3. Aufgabe

(a) Sei $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Finde eine Stammfunktion zu $\arcsin$. Verifiziere, dass $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \arcsin x\,dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Tipp: $\arcsin x = (x)' \cdot \arcsin x$.

(b) Finde eine Stammfunktion zu $\ln^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Verifiziere, dass $\int_1^2 \ln^2(x)\,dx = 2\ln^2\left(\frac{e}{2}\right)$.
Tipp: zweimal Tipp zu (a).

(bitte wenden)

4. Aufgabe

(a) Beweise für $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $|k| \neq |\ell|$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(\ell x)\,dx = 0\,.$$

(b) Beweise:

$$b_{n,k} := \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \left[(n+1)\binom{n}{k}\right]^{-1}$$

für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.

Tipp zu (b): Für festes k Induktion über $n \geq k$; zeige zuerst: $b_{n+1,k} = b_{n,k} - \frac{k+1}{n-k+1} b_{n+1,k}$.