3. Blatt zur Analysis 2 Abgabe: 29.04. bei ILIAS
Aufgabe 1 soll abgegeben werden. Es gibt die Möglichkeit, eine der Aufagben 3 oder 4 abzugeben und zusätzliche Punkte zu holen.

1. Aufgabe (12 Punkte)

a) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$. Zeige, dass $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

b) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$. Zeige:
   1. f_n konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$.
   2. f_n konvergiert *nicht* gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.
   3. f_n konvergiert gleichmäßig auf $D_a = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \geq a\}$ für jedes $a > 0$.

2. Aufgabe

Beweise:

(a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x(1-x)^n$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(b) $g_n := n \cdot f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Tipp zu (b): $g_n(\frac{1}{n}) = ?$

Sei $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h_n(x) := nxe^{-nx^2}$.

(c) Konvergieren die h_n punktweise? Falls ja, gegen welche Funktion?

(d) Auf welchen abgeschlossenen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ konvergieren die h_n gleichmäßig?

Tipp zu (d): Funktionendiskussion.

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X. Zeige, dass dann auch $d(x,y) := \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ eine Metrik auf X ist.
Für “min” statt “max” gilt das nicht immer; finde Gegenbeispiele auf $X = \mathbb{R}^2$.

(b) (X_1, d_1) und (X_2, d_2) seien metrische Räume. Für $x, y \in X_1 \times X_2$ sei $d(x,y) := \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$. Zeige, dass d eine Metrik auf $X_1 \times X_2$ ist.

(bitte wenden)

4. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, daß für $x \in (-1, 1)$ gilt:

(a) $\arctan x \;=\; x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} \pm \;\ldots$

(b) $\arcsin x \;=\; x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \dfrac{x^7}{7} + \;\ldots$

Anleitung: Entwickle jeweils zunächst die *Ableitung* der genannten Funktionen in eine Potenzreihe (man braucht dazu übrigens nicht auf die Definition der Taylorreihe zurückzugreifen).