5. Blatt zur Analysis 2

Abgabe: bis zum 13.05.2020 um 23:59 Uhr bei ILIAS

Aufgabe 2 soll abgegeben werden. Es gibt die Möglichkeit, die Aufagbe 3 abzugeben und zusätzliche Punkte zu holen.

1. Aufgabe

Für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ bestimme man das Innere, den Rand und der Abschluss. Welche der Mengen sind offen bzw. abgeschlossen?

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
2. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \times (0, n)$
3. $\left\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) : m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$
4. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{1}{n}, n\right)\right)$

2. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Es seien $\mathring{M}$ (das Innere), $\overline{M}$ (der Abschluss) und ∂M (der Rand) von M, definiert wie in der Vorlesung. Zeige, dass $\partial M = \overline{M} \backslash \mathring{M}$.

(b) Sei Y ein weiterer metrischer Raum und $X \times Y$ der metrische Raum versehen mit der Metrik eingeführt in der Aufgabe 3 aus Blatt 3. Sei $N \subset Y$. Zeige:

1. $(M \times N)^{\circ} = \mathring{M} \times \mathring{N}$
2. $\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N}$
3. $\partial(M \times N) = \left(\partial M \times \overline{N}\right) \cup \left(\overline{M} \times \partial N\right)$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $p \geqslant 1$, und sei ℓ^p die Menge aller Folgen $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu|^p$ konvergiert. Zeige:

(a) Mit $z, w \in \ell^p$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ liegen auch $z + w$ und λz in ℓ^p, wobei Addition und Multiplikation mit Skalaren gliedweise definiert sind. (Insbesondere ist ℓ^p ein $\mathbb{C}$–Vektorraum.)

(b) Durch $\ell^p \ni z = (z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \mapsto \|z\|_p := \left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu|^p\right)^{1/p}$ ist eine Norm auf ℓ^p gegeben.

(c) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum. (Hinweis: Es reicht nicht, zu einer Cauchy-Folge von Elementen von ℓ^p ein Element a anzugeben, gegen das die Folge gliedweise konvergiert; nachzuweisen sind auch $a \in \ell^p$ und Konvergenz gegen a bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ auf ℓ^p.)