6. Blatt zur Analysis 2

Abgabe: bis zum 20.05.2020 um 23:59 Uhr bei ILIAS
Aufgaben 1 und 2 sollen abgegeben werden. Es gibt die Möglichkeit, die Aufgabe 3 abzugeben und zusätzliche Punkte zu holen.

1. Aufgabe (6 Punkte)

Finden Sie die Stetigkeitsstellen folgender Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Zeige, dass $U(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid AA^* = E_n\}$ eine kompakte Teilmenge von $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist; dabei sei E_n die Einheitsmatrix und $A^* = \overline{A}^\top = (\overline{a}_{ji})$ für $A = (a_{ij})$.

(c) Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig.
Zeige: Ist X kompakt, so ist f ein Homöomorphismus.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $C^0([a,b])$ der Raum der auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen reellwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{[a,b]}$, in der $C^0([a,b])$ vollständig ist. Sei $k : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $A : C^0([a,b]) \to C^0([a,b])$ gegeben durch

$$(Af)(s) := \int_a^b k(s,t)f(t)dt.$$

(1) Zeige: A ist stetig und hat die Operatornorm

$$\|A\| = \|A\cdot 1\|_{[a,b]} = \left\| \int_a^b |k(\cdot,t)|dt \right\|_{[a,b]},$$

wobei 1 die konstante Funktion mit Wert 1 ist.
(2) Zeige: Für $\|A\| < 1$ hat die Gleichung $f - Af = g$ für jedes $g \in C^0([a,b])$ genau eine Lösung. Stelle diese mit Hilfe der geometrischen Reihe für $(\mathrm{Id} - A)^{-1}$ dar.

Die zu lösende Gleichung in (2) heißt Fredholm-Gleichung nach Erik Ivar Fredholm (1866-1927). Die geometrische Reihe wird in diesem Fall auch Neumannsche Reihe genannt nach Carl Gottlieb Neumann (1832-1925).

(bitte wenden)

4. Aufgabe

Sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ kompakt. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in X mit $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeige:

(a) Es existiert $r > 0$, so dass es zu jedem $x \in K$ ein $i \in I$ mit $B_r(x) \subset U_i$ gibt.

Bemerkung: Eine solche Zahl r heisst Lebesguezahl der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K.

(b) Zu jedem $r > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_k$ in K mit

$$K \subset B_r(x_1) \cup \ldots \cup B_r(x_k).$$

Bemerkung: Dies zeigt, dass (folgen)kompakte Teilmengen metrischer Räume die Heine-Borel Überdeckungseigenschaft haben.