7. Blatt zur Analysis 2

Abgabe: bis zum 27.05.2020 um 23:59 Uhr bei ILIAS
Aufgabe 3 soll abgegeben werden. Es gibt die Möglichkeit, die Aufgaben 1 und 4 abzugeben und zusätzliche Punkte zu holen.

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ Gebiete (d. h. offene zusammenhängende Mengen). Zeige, dass $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ein Gebiet ist.

(b) Sei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ die n–Sphäre. Zeige, dass es zu jeder stetigen Funktion $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in S^n$ existiert, mit $f(x) = f(-x)$.
(Beispiel: Bei jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es antipodale Orte, in denen gleichzeitig dieselbe Temperatur herrscht.)

2. Aufgabe

(a) Finde alle Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung. Löse dazu zuerst die entsprechenden homogenen Differentialgleichung und variiere anschließend die Konstanten.

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{x} + x, \quad x \in (0, +\infty)$$

(b) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = 2t(1 + x^2).$$

(c) Löse das Anfangswertproblem

$$x\dot{x} + (1 + x^2)\sin t = 0 \quad , \quad x(0) = 1.$$

3. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Finde alle Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1 + x^2)y'(x) + y(x) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Löse dazu zuerst die entsprechenden homogenen Differentialgleichung und variiere anschließend die Konstanten.

(b) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(t^2 - 1)\dot{x} + 2tx^2 = 0$$

(c) Löse das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 1 + x^2 \quad , \quad x(0) = 1.$$

(bitte wenden)

4. Aufgabe (4 Punkte)

Zwei Massepunkte P_1 und P_2 mit der gleichen Masse m sollen sich reibungslos auf der x-Achse bzw. auf der y-Achse bewegen können. Sie sollen sich gegenseitig mit einer Kraft vom Betrag $f(r)$ anziehen, wobei r den Abstand zwischen den beiden Punkten bezeichnet. Wir nehmen an, dass die beiden Massenpunkte am Anfang ruhen und wollen ihre Bewegung danach beschreiben.

1. Zeige mit Hilfe der Newtonschen Bewegungsgleichungen, dass die Massenpunkte die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:
$$\begin{aligned} (I) \quad mx''(t) &= -f(r(t))\frac{x(t)}{r(t)} \\ (II) \quad my''(t) &= -f(r(t))\frac{y(t)}{r(t)}. \end{aligned}$$
2. Zeige , dass das Verhältnis von x und y konstant ist.
3. Skizziere und beschreibe die Bewegung der Strecke $\overline{P_1 P_2}$.
4. Mit welchen zeitlichen Abstand erreichen beide Massenpunkte den Koordinatenursprung?