8. Blatt zur Analysis 2

Abgabe: bis zum 10.06.2020 um 23:59 Uhr bei ILIAS

Aufgabe 2 soll abgegeben werden. Es gibt die Möglichkeit, die Aufagben 3, 4 und 5 abzugeben und zusätzliche Punkte zu holen.

1. Aufgabe

(i) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1\, x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Zeige, daß f stetig ist und für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ und jedes $y \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} = g(x, y) \tag{$*$}$$

existiert, aber daß die Abbildung $y \mapsto g(0, y)$ nicht linear ist. Ist f im Punkt 0 differenzierbar?

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3\, x_2}{x_1^4 + x_2^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Zeige, daß der Limes $g(x, y)$ in $(*)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ und jedes $y \in \mathbb{R}^2$ existiert und daß $y \mapsto g(x, y)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ linear ist. Ist f im Punkt 0 differenzierbar?

2. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Beweise, dass f in $(0, 0)$ differenzierbar ist, aber die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0, 0)$ nicht stetig sind.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Beweise, dass alle partiellen Ableitungen von g in $(0, 0)$ existieren, aber g in $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

(c) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto \left(xy + y^z, \frac{z}{x}\right)$ und werte sie in den Punkten $(1, 2, 0), (1, 1, -1)$ und $\left(e, \frac{1}{e}, 2\right)$ aus.

(bitte wenden)

3. Aufgabe (2 Punkte)
Berechne die Jacobi-Matrix J und die Funktionaldeterminante $\det J$ der Funktionen

$$p(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad k(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $U = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und *homogen vom Grad* $\alpha \in \mathbb{R}$, das heißt $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $t > 0$, $x \in U$. Zeige:

i) $df(tx) = t^{\alpha-1} df(x)$ für alle $t > 0$, $x \in U$.

ii) $df(x) \cdot x = \langle \operatorname{grad} f(x), x \rangle = \alpha f(x)$ für alle $x \in U$ (*Eulersche Identität*.)

5. Aufgabe (6 Punkte)
Sei $\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ der Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Sei $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der invertierbaren Elemente in $\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$.
Die Operatornorm ist definiert als $\|T\| = \sup\{\|Tv\| \mid \|v\| \leqslant 1\}$.
Sei $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$. Wir wissen, dass $\operatorname{Id} - T$ invertierbar ist, falls $\|T\| < 1$, und die Umkehrabbildung durch die konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ dargestellt wird.
(a) Seien $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ und $T_0 \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass $\|TT_0^{-1} - \operatorname{Id}\| < 1$, falls $\|T - T_0\| < 1/\|T_0^{-1}\|$. Folgere, dass die offene Kugel in $\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ mit Mittelpunkt T_0 und Radius $1/\|T_0^{-1}\|$ nur aus invertierbaren Elementen besteht.
(b) Seien $T, S \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}$ und dass die Abbildung $\varphi : \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $T \mapsto T^{-1}$, stetig ist.
(c) Zeige, dass φ stetig differenzierbar ist und seine Ableitung durch $d\varphi(T) \cdot H = -T^{-1} \cdot H \cdot T^{-1}$ für alle $T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $H \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ gegeben ist.
Anleitung: Zeige, dass $(T + H)^{-1} - T^{-1} = -(T + H)^{-1} \cdot H \cdot T^{-1}$ für einen hinreichend kleinen Zuwachs H.