**9. Blatt zur Analysis 2**

Abgabe: bis zum 17.06.2020 um 23:59 Uhr bei ILIAS

Aufgabe 4 soll abgegeben werden. Es gibt die Möglichkeit, die Aufagben 2 und 3 oder 5 abzugeben und zusätzliche Punkte zu holen.

**1. Aufgabe**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der *Laplace-Operator* $\Delta : C^2(U,\mathbb{R}) \to C^0(U,\mathbb{R})$ ist definiert durch $\Delta f := \partial_{11} f + \ldots + \partial_{nn} f$. Wir betrachten nun $U := \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und die Funktion $r : U \ni x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}$.

(a) Berechne die Gradienten $\operatorname{grad}(r^{2-n})(x)$ und $\operatorname{grad}(\log r)(x)$.

(b) Zeige: $\Delta(r^{2-n}) = 0$; im Falle $n = 2$ gilt $\Delta(\log r) = 0$.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r,\phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung. Zeige, daß mit $F := f \circ P \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt: $\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}F + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}F + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}F\Big)(r,\phi) = \big(\Delta f\big)(P(r,\phi))$.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^k \in \mathbb{C}$ sowie die zugehörige Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die sich daraus nach der üblichen Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ ergibt. $f$ ist ein $\mathbb{R}^2$–wertiges Polynom, und somit ist insbesondere $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.

(a) Sei $P$ die Polarkoordinatenabbildung und $F := f \circ P$. Berechne $F(r,\phi)$.

(b) Zeige $\Delta f_i = 0$ für $i = 1,2$.

*Hinweis: Benutze Aufgabe 2 und Vorsicht: $P$ ist nicht surjektiv.*

**4. Aufgabe** (12 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Abbildung $F = (F_1,\ldots,F_n) : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld. Für ein differenzierbares Vektorfeld $F$ heißt die Funktion $\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^n \partial_i F_i$ *Divergenz* des Vektorfeldes $F$.

(a) Sei $u : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass div$(uF) = \langle \operatorname{grad} u, F\rangle + u\,$div$F$ .

(b) Berechne div$\big(\frac{x}{\|x\|_2}\big)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(c) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige:

$$\Delta f = \text{div} \operatorname{grad} f \quad \text{ und}$$
$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle.$$

(d) Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass

$$\Delta h(\|x\|_2) = h''(\|x\|_2) + \frac{n-1}{\|x\|_2} h'(\|x\|_2) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

**5. Aufgabe** (2 Punkte)

Eine Funktion $f \in \mathscr{C}^2(U)$ auf eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *harmonisch* wenn $\Delta f = 0$ auf $U$.

Sei $U = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x) := h(\|x\|_2)$ ($f$ heißt *rotationssymmetrisch*).

Zeige, dass $f$ harmonisch ist, genau dann, wenn $h(r) = a + br^{2-n}$, falls $n \neq 2$, oder $h(r) = a + b \log r$, falls $n = 2$.