10. Blatt zur Analysis 2

Abgabe: bis zum 24.06.2020 um 23:59 Uhr bei ILIAS

Aufgabe 4 soll abgegeben werden. Es gibt die Möglichkeit, die Aufagben 2, 3 und 5 abzugeben und zusätzliche Punkte zu holen.

1. Aufgabe

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, daß $f_k : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $f_k(A) = A^k$, eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung ist und $df_k(A) \cdot B = \sum_{j=0}^{k-1} A^j B A^{k-1-j}$.

(ii) Zeige, daß die Abbildung $\exp : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, von der Klasse $\mathcal{C}^1$ ist, und berechne $d\exp(0)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0)\ ,$$

(a) $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ existieren in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ (auch im Nullpunkt) und sind stetig; insbesondere ist f differenzierbar;

(b) $\partial_{12} f(0,0)$ und $\partial_{21} f(0,0)$ existieren, sind aber nicht gleich.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Berechne für $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (x,y) \mapsto x^y \in \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen $\partial_{j_1 j_2 j_3} f(x,y)$ dritter Ordnung. Stelle dann das Taylorpolynom dritten Grades zu f mit Entwicklungspunkt $(1,1)$ auf.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $f(x,y) := \sin(x + \sqrt{y}),\ y > 0$.

(a) Berechne alle partiellen Ableitungen von f bis zum zweiten Grad.

(b) Berechne das erste Taylorpolynom $T_{1,(0,\pi^2)} f(x,y)$ um den Entwicklungspunkt $(0,\pi^2)$.

(c) Zeige durch Abschätzung des Taylorrestglieds, dass

$$|f(0,10) - T_{1,(0,\pi^2)} f(0,10)| \leqslant 0,02.$$

(Man darf dabei benutzen, dass $9 \leqslant \pi^2 \leqslant 10$.)

5. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt; $\overline{U}$ sei der Abschluss von U. Sei $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_U \in C^2(U, \mathbb{R})$. Beweise:

(a) Gilt auf U die Ungleichung $\Delta f > 0$, so hat f auf U kein lokales Maximum. Insbesondere gilt $\max f = \max(f|_{\partial U})$.

(b) Die zweite Aussage aus (a) gilt auch dann noch, wenn auf U nur $\Delta f \geqslant 0$ vorausgesetzt wird. Betrachte zum Beweis die Hilfsfunktionen $f_\varepsilon : \overline{U} \ni x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x\|^2 \in \mathbb{R}$.