11. Blatt zur Analysis 2

Freiwillige Abgabe: bis zum 01.07.2020 um 23:59 Uhr bei ILIAS
Es gibt damit noch die Möglichkeit, Punkte für die Zulassung zu holen.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, (b) $g(x,y) = \cos x \cdot \cosh y$.

2. Aufgabe

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2 - xy + 4y^2 \in \mathbb{R}$ und das Innere $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$ einer Ellipse.

(a) Bestimme die lokalen Extrema von f auf E.

(b) Parametrisiere den Rand von E durch eine Kurve c und bestimme die lokalen Extrema von $f|_{\partial E}$ durch Betrachtung derer von $f \circ c$.

(c) Wo nimmt f auf der abgeschlossenen Ellipse $\overline{E}$ sein Minimum und Maximum an? Hat $f|_{\overline{E}}$ noch andere lokale Extrema als diese?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := (2e^x - x^2, e^y + y)$.

(a) Zeige, dass f bijektiv ist. (Tipp: Monotonie und Zwischenwertsatz in den einzelnen Koordinaten.)

(b) Zeige, dass die Umkehrabbildung f^{-1} zu f stetig differenzierbar ist.

(c) Berechne $J_{f^{-1}}(2,1)$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $U = \{\,(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0\,\}$ und

$$P : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad P(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\ .$$

(a) Zeige, daß P stetig differenzierbar ist, und bestimme die Menge der Punkte, in denen P lokal invertierbar ist.

(b) Bestimme die Ableitung einer lokalen Umkehrabbildung von P.

(c) Zeige, daß P auf $U_0 = (0,\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ invertierbar ist, und bestimme die Umkehrabbildung. Bilde die Ableitung der Umkehrabbildung und verifiziere das Ergebnis aus (b).