

## Analysis III

### Blatt 0

keine Abgabe

Besprechung: 22.10.21 in den Übungen

---

#### Aufgabe 1

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x, y) = xye^{-x-y}$ .

- (a) In der Umgebung welcher Punkte  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  läßt sich die Bedingung  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  gemäß dem Satz über implizite Funktionen durch eine  $C^1$ -Funktion  $g : x \mapsto y(x)$  bzw.  $\tilde{g} : y \mapsto x(y)$  auflösen?
- (b) Berechnen Sie jeweils  $dg(x_0)$  bzw.  $d\tilde{g}(y_0)$ .

Zeichnen sie eine qualitative Skizze der Höhenlinien von  $f$ . Die Ergebnisse von a) und b) sind dabei hilfreich!

#### Aufgabe 2

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch  $f(x, y) := (2e^x - x^2, e^y + (x^2 + 1)y)$ . Zeigen Sie:

- (a)  $f$  ist bijektiv.
- (b)  $f$  ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Was ist  $d(f^{-1})(2, 1)$ ?

#### Aufgabe 3

Sei  $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (\cos t, \sin 2t)$ . Zeigen Sie:

- (a)  $f$  ist eine injektive Immersion.
- (b)  $f$  ist keine Einbettung.
- (c)  $\text{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4x^2 + 4x^4 = 0\}$ .
- (d)  $\text{Im}(f)$  ist keine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ , aber  $\text{Im}(f) \setminus \{(0, 0)\}$  ist eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ .

#### Aufgabe 4

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2.$$

Bestimmen Sie die regulären und kritischen Werte von  $f$ . Skizzieren Sie die Niveaumengen  $f^{-1}(c)$  für  $c \in \mathbb{R}$ . Welche topologische Eigenschaft von  $f^{-1}(c)$  ändert sich, wenn  $c$  einen kritischen Wert durchläuft?