

Analysis III

Blatt 2

Abgabe: bis 28.10.21, 23:59 Uhr auf Ilias

Besprechung: 05.11.21 in den Übungen

Aufgabe 1

10 Punkte

Bestimmen Sie den Tangentialraum und den Normalenraum an einen beliebigen Punkt

- (a) des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ und
- (b) des Katenoids $M = \{(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine glatte positive Funktion,

$$M_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

eine durch f definierte Rotationsfläche und $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ ein Zylinder. Sei $F : M_f \rightarrow Z$ die Abbildung

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{1}{f(z)} y, \frac{1}{f(z)} x, z + 1 \right).$$

- (a) Was bedeutet diese Abbildung geometrisch?
- (b) Zeigen Sie, daß F ein Diffeomorphismus zwischen den Flächen M_f und Z ist, d.h. $F : M_f \rightarrow Z$ ist bijektiv, F und F^{-1} sind glatt.
- (c) Sei $p = (x, y, z) \in M_f$. Zeigen Sie, daß $v = (-y, x, 0) \in \mathbb{R}^3$ ein Tangentialvektor an M_f im Punkt p ist, und bestimmen Sie den Bildvektor $dF(p) \cdot v \in T_{F(p)}Z$.
- (d) Veranschaulichen Sie v und $dF(p) \cdot v$ in einer Skizze.

Aufgabe 3

Es sei S^2 die 2-dimensionale Sphäre vom Radius 1 im \mathbb{R}^3 . Betrachten Sie die Abbildungen $X, Y : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X(x, y, z) = (-y, x, 0) \quad , \quad Y(x, y, z) = (-z, 0, x).$$

- (a) Zeigen Sie, daß X und Y glatte Vektorfelder auf S^2 sind. Skizzieren Sie diese Vektorfelder.
- (b) Geben Sie die Komponenten von X und Y bzgl. der durch die sphärischen Koordinaten (Blatt 1, Aufgabe 1(a)) gegebenen kanonischen Basis an.

Aufgabe 4

Sei $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, wobei $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$. Identifizieren Sie $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und betrachten Sie die stereographische Projektion $p_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$.

Sei

$$f : S^2 \rightarrow S^2 \quad , \quad f(x) = \begin{cases} p_N^{-1} \circ P \circ p_N(x) & , \quad x \neq N \\ N & , \quad x = N \end{cases}.$$

Zeigen Sie, daß $f \in C^\infty(S^2, S^2)$.