Analysis III

Blatt 3

Abgabe: bis 08.11.21, 23:59 Uhr auf Ilias
Besprechung: 12.11.21 in den Übungen

Aufgabe 1 **10 Punkte**

(a) Seien M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ glatt. Sei $f = F|_M : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{grad} f(x)$ die orthogonale Projektion von $\operatorname{grad} F(x)$ auf T_xM ist.

(b) Sei $f : S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_3$, die Höhenfunktion auf der Sphäre S^2. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ (z.B. mit Hilfe von a)).

Aufgabe 2
Es bezeichne $p_S : S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion vom Südpol aus.

(a) Sei $v \in T_xS^n$, wobei $x \neq S$. Vergleichen Sie die Länge des Vektors v im Euklidischen Vektorraum (T_xS^n, g_x) mit der Länge des Bildvektors $dp_S(x) \cdot v$ im Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(b) Seien $v, w \in T_xS^n$, wobei $x \neq S$. Vergleichen Sie den Winkel zwischen v, w in (T_xS^n, g_x) mit dem Winkel zwischen den Bildvektoren $dp_S(x) \cdot v$, $dp_S(x) \cdot w$ in $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Aufgabe 3

(a) Es sei $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$. Zeigen Sie, daß es keine glatte Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $X = \operatorname{grad} f$.

(b) Geben Sie den Gradienten einer Funktion $f \in C^\infty(S^n)$ in der durch die stereographische Projektion gegebenen Karte $(S^n \setminus \{S\}, p_S)$ an.

Aufgabe 4
Geben Sie die Koeffizienten der induzierten Riemannschen Metrik für die Wendelfläche M_1 und das Katenoid M_2 in der durch die jeweilige Parametrisierung ψ gegebenen Karte an:

(a) Wendelfläche $M_1 := \big\{\psi(u, v) := (u \cos v, u \sin v, v) : u, v \in \mathbb{R}, u > 0\big\}$

(b) Katenoid $M_2 = \big\{\psi(u, v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\big\}$.