Analysis III

Blatt 4

Abgabe: bis 15.11.21, 23:59 Uhr auf Ilias

Besprechung: 19.11.21 in den Übungen

Aufgabe 1 **10 Punkte**

(a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Zeigen Sie, dass

$$D = \{ (x, x_{n+1}) \in U \times \mathbb{R} \mid x_{n+1} - f(x) \leq 0 \}$$

eine glatt berandete Teilmenge von $M = U \times \mathbb{R}$ ist, und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld.

(b) Sei

$$M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 2 \} \quad \text{und } D = \{ (x, y, z) \in M \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}.$$

Zeigen Sie, dass D eine glatt berandete Teilmenge von M ist, und berechne das äußere Einheitsnormalenfeld ν. Berechne $T_{(x,y,z)}\partial D$ mit Hilfe einer Parametrisierung von ∂D und überprüfen Sie, ob $\nu(x, y, z) \perp T_{(x,y,z)}\partial D$.

Aufgabe 2

Die Viviani–Fläche D ist der Durchschnitt des Vollzylinders

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$

mit der Sphäre $S_R^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$. Finden Sie die regulären und singulären Punkte von ∂D und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld.

Aufgabe 3

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie:

$$a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c \qquad \text{(Grassmann-Identität)}$$
$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \qquad \text{(Jacobi-Identität)}$$

(b) Bezeichne mit (a, b, c) die 3×3- Matrix mit Spalten a, b, c.
Zeigen Sie: $\det(a, b, c) = \langle a \times b, c\rangle$.

(bitte wenden)

(c) Zeigen Sie die folgende Verschärfung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\langle a, b\rangle^2 + \|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2.$$

(d) Sei $\theta_{a,b}$ der Winkel zwischen a und b, gegeben durch

$$\theta_{a,b} = \arccos\left(\frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\|a \times b\| = \|a\|\,\|b\| \sin\theta_{a,b}$ und dass, falls a, b linear unabhängig sind, $\|a \times b\|$ die Fläche des Parallelogramms ist, das in der Ebene $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ von a und b aufgespannt wird.

(e) Seien a, b linear unabhängig und $p, q \in \mathbb{R}^3$. Sei

$$E(p; a, b) := p + \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$$

die 2-dimensionale affine Ebene durch p, die parallel zu $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ ist. Zeigen Sie, dass der Abstand des Punkts q von $E(p; a, b)$ ist

$$d(q, E) = \frac{|\langle a \times b, q - p\rangle|}{\|a \times b\|}.$$

(f) Seien a, b, c linear unabhängig. Definiere das Volumen des Parallelotops $P(a, b, c)$ als das Produkt der Grundfläche von $P(a, b, c)$ in der Ebene $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ mit der Höhe durch c. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol} P(a, b, c) = |\langle a \times b, c\rangle| = |\det(a, b, c)|.$$