Analysis III

Blatt 5

Abgabe: bis 23.11.21, 23:59 Uhr auf Ilias

Besprechung: 26.11.21 in den Übungen

Aufgabe 1

10 Punkte

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $\dim V = n$. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis und $\omega = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$. Für $v \in V$ definiere $v \lrcorner \omega \in \Lambda^{n-1} V^*$ durch $v \lrcorner \omega(v_1, \dots, v_{n-1}) := \omega(v, v_1, \dots, v_{n-1})$ (inneres Produkt von ω mit dem Vektor v , man schreibt auch $i_v \omega = v \lrcorner \omega$).

- (a) Der *duale Vektor* zu $v \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist definiert durch $v^*(u) = \langle v, u \rangle$, $u \in V$. Zeigen Sie, dass

$$v^* \wedge (i_v (e_{\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}^*)) + i_v (v^* \wedge (e_{\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}^*)) = \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=\|v\|^2} e_{\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}^*$$

für alle $k = 0, \dots, n$ und geordneten Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$.

- (b) Nehmen wir an, dass $\{e_1, \dots, e_n\}$ Orthonormalbasis für ein Skalarprodukt ist. Zeigen Sie, dass $V \rightarrow \Lambda^1 V^*$, $u \mapsto \omega^u = \langle u, \cdot \rangle$, ein Isomorphismus ist, und es gilt

$$\omega^u \wedge (v \lrcorner \omega) = \langle u, v \rangle \omega,$$

insbesondere $\omega^v \wedge (v \lrcorner \omega) = \|v\|^2 \omega$.

Aufgabe 2

- (a) Sei $\omega = f dx + g dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ eine geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $d\alpha = \omega$, wobei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
- (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $d\eta = y dx \wedge dy$, wobei $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.
- (c) Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ die 1-Form

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Beweisen Sie, daß ω geschlossen aber nicht exakt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist. Geben Sie eine (möglichst große) offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an, auf der ω exakt ist.

Aufgabe 3

Das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist definiert als Bild der Funktion

$$f : (-1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(t, \vartheta) = \left(2 \cos \vartheta + t \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta, 2 \sin \vartheta + t \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta, t \sin \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Zeigen Sie, daß M nicht orientierbar ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit.

- (a) Seien $A, B \subset M$, wobei A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es $f \in C^\infty(M)$ gibt mit kompaktem Träger, so dass $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.
- (b) Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $W \supset M$ in $\mathbb{R}^N$ und $F \in C^\infty(W, \mathbb{R}^k)$ existiert, so dass $F|_M = f$. Falls M abgeschlossen ist, zeigen Sie, dass $W = \mathbb{R}^N$ gewählt werden kann.