

Analysis III

Blatt 6

Abgabe: bis 30.11.21, 23:59 Uhr auf Ilias

Besprechung: 03.12.21 in den Übungen

Aufgabe 1

10 Punkte

Zeigen Sie, dass folgende Untermannigfaltigkeiten orientierbar sind. Wählen Sie eine Orientierung und berechnen Sie jeweils eine lokale Darstellung der Volumenform.

- (a) *Bizylinderkurve*: $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 2 \}$.
- (b) *Rotationsfläche*: $R_f = \{ (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\varphi, z) \in \mathbb{R} \times (a, b) \}$, wobei $f \in C^\infty((a, b))$ und $f > 0$.
- (c) *Wendelfläche*: $W = \{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid (\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 \}$.
- (d) *Graph einer Funktion* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: $G_f = \{ (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2 \}$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann orientierbar, wenn auf M ein glattes Einheitsnormalenfeld existiert, d.h. eine glatte Abbildung $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\nu(x) \in N_x M$ und $\|\nu(x)\| = 1$ für alle $x \in M$.

Tipp: Für eine positiv orientierte Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ setze $\nu(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|}$.

Aufgabe 3

Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $f \in C^\infty(U)$ eine Funktion und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld.

- (a) Zeigen Sie:
 - (i) $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$ und
 - (ii) $\text{div}(\text{rot } F) = 0$.
- (b) Wir nehmen an, dass U sternförmig ist. Zeigen Sie:
 - (i) Zu jedem Vektorfeld $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\text{rot } F = 0$ existiert ein Potential $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } h = F$.
 - (ii) Zu jedem Vektorfeld $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\text{div } F = 0$ existiert ein Vektorfeld $G \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\text{rot } G = F$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Es sei $E = E(x, t) : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ das elektrische Feld und $H = H(x, t) : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld. Dabei bezeichnen wir die Punkte des \mathbb{R}^3 mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ und mit $t \in \mathbb{R}$ die Zeit. Die Operationen der Divergenz und Rotation auf die räumlichen Koordinaten $x \in \mathbb{R}^3$ der zeitabhängigen Vektorfelder bezeichnen wir mit div_x bzw. rot_x . Im Vakuum lauten die ersten Maxwellschen Gleichungen (bei geeigneter Normierung):

$$\operatorname{rot}_x E = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad , \quad \operatorname{div}_x H = 0 \quad .$$

Wir definieren folgende 2-Form in \mathbb{R}^4 :

$$\Omega = \sum_{j=1}^3 E_j(x, t) dx_j \wedge dt + H(x, t) \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^3} \quad , \quad \text{wobei } \omega_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad .$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Maxwellschen Gleichungen äquivalent zu $d\Omega = 0$ sind.
- (b) Sei $V \subset U \times \mathbb{R}$ ein sternförmiges Gebiet. Zeigen Sie, dass es ein magnetisches Vektorpotential $A = A(x, t) \in C^\infty(V, \mathbb{R}^3)$ und ein skalares Potential $a = a(x, t) \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\operatorname{rot}_x A = H \quad , \quad \operatorname{grad}_x a - \frac{\partial A}{\partial t} = E \quad . \quad (*)$$

- (c) Sei (a_0, A_0) eine Lösung von (*). Zeigen Sie, dass alle andere Lösungen von der Form

$$\left(a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} , A_0 + \operatorname{grad}_x \varphi \right)$$

sind, mit einer Funktion $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ (Freiheit der Eichung).

- (d) Nehmen wir an, dass die Eichbedingung $\frac{\partial a}{\partial t} = \operatorname{div}_x A$ gilt. Zeigen Sie, dass A der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta_x A = 0$$

genügt. Dabei wirken die Differentialoperatoren komponentenweise.

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $\operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x A + \Delta_x A = \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x A$, und nutzen Sie dabei eine weitere Maxwellsche Gleichung: $\operatorname{rot}_x H = \frac{\partial E}{\partial t}$.

- (e) Sei (a_0, A_0) eine Lösung der Gleichung (*) und $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_x \varphi = -\frac{\partial a_0}{\partial t} + \operatorname{div}_x A_0.$$

Beweisen Sie, dass $(a, A) = \left(a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} , A_0 + \operatorname{grad}_x \varphi \right)$ die Eichbedingung erfüllt.