

Analysis III

Blatt 7

Abgabe: bis 08.12.21, 23:59 Uhr auf Ilias

Besprechung: 10.12.21 in den Übungen

Aufgabe 1

10 Punkte

Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung.

(a) Zeigen Sie, dass für $F := f \circ P \in C^2(P^{-1}(U), \mathbb{R})$ gilt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} F + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} F + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} F \right) (r, \phi) = (\Delta f)(P(r, \phi)).$$

(b) Zeigen Sie $\Delta(\log \|x\|_2) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wobei $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, und $\Delta(\operatorname{Re} z^k) = \Delta(\operatorname{Im} z^k) = 0$ für alle $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine glatte Kurve.

(a) Zeigen Sie, dass es glatte Funktionen $r, \vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\gamma(t) = (r(t) \cos \vartheta(t), r(t) \sin \vartheta(t)).$$

Anleitung:

Sei $r(t) = \|\gamma(t)\|$. Wähle $\vartheta_a \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(a) = (r(a) \cos \vartheta_a, r(a) \sin \vartheta_a)$ und definiere

$$\vartheta(t) = \vartheta_a + \int_a^t \frac{-y(s)x'(s) + x(s)y'(s)}{r(s)^2} ds.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\vartheta(b) - \vartheta(a) = \int_\gamma \omega$, wobei ω die Windungsform ist. Die Zahl

$$W(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega$$

heißt die *Windungszahl* von γ um 0.

(c) Zeigen Sie, dass $W(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$, wenn γ geschlossen ist ($\gamma(a) = \gamma(b)$).

1. Berechnen Sie $W(\gamma, 0)$ für $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(2n\pi t), \sin(2n\pi t))$.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ -Algebra der Borelmengen des \mathbb{R}^n . $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ bezeichne die abgeschlossenen Mengen der \mathbb{R}^n , $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ die kompakten Mengen des \mathbb{R}^n und \mathcal{Q}_n die Menge der Quader im \mathbb{R}^n . Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und

$$\mathcal{A}^\mu := \{ E \subset X \mid \exists A \in \mathcal{A}, \exists N \subset N_0 \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N_0) = 0, \text{ so daß } E = A \cup N \} \quad (*)$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung $\bar{\mu} : \mathcal{A}^\mu \rightarrow [0, \infty]$, $\bar{\mu}(E) := \mu(A)$, mit $E = A \cup N$ wie in (*) ist wohldefiniert.
- (b) $E \in \mathcal{A}^\mu \iff \exists E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ mit $E_1 \subset E \subset E_2$ und $\mu(E_2 \setminus E_1) = 0$.