Analysis III

Blatt 9
Abgabe: bis 10.01.22, 23:59 Uhr auf Ilias
Besprechung: 14.01.22 in den Übungen

Aufgabe 1 **10 Punkte**
(Mengen vom Cantorschen Typ)
Ausgehend vom kompakten Intervall $I = [0, 1]$ nehmen wir nacheinander offene Intervalle heraus. Zunächst wird ein in der Mitte gelegenes offenes Teilintervall I_{11} herausgenommen, dann aus jedem der beiden Reste ein Mittelstück I_{21} bzw. I_{22}, darauf aus jedem der verbleibenen vier Reste ein Mittelstück I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34} usw. Die Vereinigung G aller I_{ij}, $i = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$, ist offen. Die kompakte Restmenge $C = I \setminus G$ wird als *Menge vom Cantorschen Typ* bezeichnet.
Sei $0 < \alpha \leq 1/3$. Wählt man $\lambda_1(I_{ij}) = \alpha^i$ für $j = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$, so bezeichnet man mit G_α und C_α die erhaltenen Mengen. Setzt man $\alpha = 1/3$, so spricht man von *der* Cantorschen Menge.

(a) Zeigen Sie, dass die Mengen C_α nirgends dicht sind (d.h. jedes Intervall ein zu C_α disjunktes Intervall enthält).

(b) Berechnen Sie $\lambda_1(C_\alpha)$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$
für $\alpha \leqslant 0$ und $\alpha \geqslant 2$ weder als uneigentliches Riemann-Integral noch als Lebesgue–Integral, für $0 < \alpha \leqslant 1$ als uneigentliches Riemann-Integral aber nicht als Lebesgue-Integral, für $1 < \alpha < 2$ als Lebesgue–Integral und absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral existiert.

Aufgabe 3

(a) Sei $a > 0$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^s e^{-ax}$ Lebesgue-integrierbar? Berechnen Sie:
$$\int_0^\infty x^s e^{-ax}\, dx = \Gamma(s+1) a^{-s-1}.$$

(b) Benutzen Sie die Entwicklung $\frac{1}{e^x-1} = \sum_{k=1}^\infty e^{-kx}$ und den Satz von Beppo Levi um zu zeigen, dass für $s > 1$ gilt:
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, d\lambda_1\,.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4
Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad \text{für } x > 0.$$

(a) Zeigen Sie für $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{\varphi(x,s)} ds\,, \quad \text{wobei } \varphi(x,s) = x \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$$

(Tipp: Substitution $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$)

(b) Sei $x > 0$. Zeigen Sie

(i) $\varphi(x,s) \leqslant -\frac{s^2}{2}$ für alle $s \in (-\sqrt{x}, 0]$ und

(ii) $\varphi(x,s) \leqslant \varphi(1,s)$ für alle $s > 0$ und $x \in [1,\infty)$.

(Tipp: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,s) = \Phi(\frac{s}{\sqrt{x}})$, wobei $\Phi(u) = \log(1+u) - \frac{u}{2} - \frac{u}{2(1+u)}$ für $u > -1$)

(c) Zeigen Sie unter Benutzung der Formel $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}$ und des Satzes über dominierte Konvergenz, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(\frac{x}{e})^x \sqrt{2\pi x}} = 1\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Kommentar: Letzteres ist die *Stirlingformel*, geschrieben auch

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

für $n \to \infty$.