Analysis III

Blatt 10

Abgabe: bis 20.01.22, 23:59 Uhr auf Ilias
Besprechung: 21.01.22 in den Übungen

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $u : \Omega \to [0, \infty)$ eine einfache Funktion bezüglich $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\nu : \mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A u \cdot \mathbf{1}_A \mathrm{d}\mu \in [0, \infty]$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert wird.

(b) Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\nu : \mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A f \mathrm{d}\mu \in [0, \infty]$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert wird.

Hinweis zu (b): Mit einer monotonen Folge $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots$ von Maßen ist auch $\lim_{n\to\infty} \mu_n$ ein Maß. Dies dürfen Sie benutzen, jedoch nicht den Satz über monotone Konvergenz (mit dem (b) auch ohne (a) elegant lösbar wäre).

Aufgabe 2

(a) Sei $a > 0$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^s e^{-ax^2}$ Lebesgue-integrierbar?

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty x^s e^{-ax^2}\, dx.$

(b) Sei $a > 0$. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \frac{x^{a-1}}{1+x^b}$ Lebesgue-integrierbar?

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx.$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}(1-x) \text{ für } x \in [0, 1).$$

Wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz auf $[0, 1)$ an und berechnen Sie die Summe der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $A > 0$ die Funktion $f : (0, A) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$ integrierbar ist. Folgern Sie, dass

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \left(\int_0^A e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy \, .$$

(b) Bestimmen Sie durch Grenzübergang $A \longrightarrow \infty$ das uneigentliche Riemann-Integral als

$$\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \, ,$$

und leiten Sie her, dass

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \, , \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \, .$$

Hinweis: Die letzten beiden Integrale sind Lebesgue–Integrale. Das Letzte wird im Beweis des Satzes von Wiener–Ikehara benötigt, der die Basis für den Wienerschen Beweis des Primzahlsatzes ist.

Aufgabe 5

Sei

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{2^n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie ihre Antworten:

(a) Ist f Riemann-integrierbar?

(b) Ist f Lebesgue-integrierbar?