WS 21/22 Marinescu / Zielinski

Analysis III

Blatt 11

Abgabe: bis 27.01.22, 23:59 Uhr auf Ilias
Besprechung: 28.01.22 in den Übungen

Aufgabe 1 **10 Punkte**

(a) Beweisen Sie, dass $(1-t/k)^k \leqslant e^{-t}$ für $0 \leqslant t \leqslant k$, und benutzen Sie diese Ungleichung und den Satz von Lebesgue um zu zeigen, dass

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \int_0^k (1 - \tfrac{t}{k})^k \, t^{x-1} \, dt \,.$$

(b) Bestimmen Sie durch sukzessive partielle Integrationen die Gaußsche Darstellung der Gammafunktion:

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k^x k!}{x(x+1)\dots(x+k)} \;.$$

(c) Berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$ unter Verwendung der Aufgabe 3b), und einer Substitution. Leiten Sie mit Hilfe von b) für $x = 1/2$ die *Wallissche Produktformel* her:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^2}{1\cdot 3}\, \frac{4^2}{3\cdot 5} \cdots \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2} \,.$$

Hinweis: Für die übliche Herleitung siehe Skript S. 69 oder Königsberger, Analysis I, §11.5.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2} \, dt \Big)^2 , \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, dt \;,$$

differenzierbar sind mit $f' + g' = 0$ und $f + g = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) Folgern Sie für $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \, d\lambda_1 = \sqrt{\pi} \,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} \, d\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} t^{2n} \, d\lambda_1 = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \, a^{-n-\frac{1}{2}} \;.$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, daß die Funktion $x \mapsto \|x\|_2^{-\alpha}$ genau dann über die Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar ist, wenn $\alpha < n$. Berechnen Sie $\int_{B_R(0)} \|x\|_2^{-\alpha} \, d\lambda_n$.

(b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $\mu : K \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte meßbare Funktion. Zeigen Sie, daß das Integral

$$\int_K \frac{\mu(x)}{\|x-a\|_2^\alpha} \, d\lambda_n$$

für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ und jeden Exponenten $\alpha < n$ existiert.

(bitte wenden)

Aufgabe 4
Benutzen Sie die Substitution

$$x^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xu^2}\, du$$

zur Bestimmung der Integrale

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx\,, \quad G(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x^{1/2}}\, dx \quad (t > 0)$$

und folgern Sie durch Grenzübergang $t \to +0$:

$$\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx = \mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(Fresnelsche Integrale).}$$

Aufgabe 5
Betrachten Sie

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \\ 0, & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) g ist stetig auf $[0,1]$?

(b) g ist stetig auf $[0,1] \cap \mathbb{Q}$?

(c) g ist stetig auf $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$?

(d) g ist Riemann-integrierbar?

(e) g ist Lebesgue-integrierbar?