12. Blatt/Klausurvorbereitung zur Vorlesung Analysis III

keine Abgabe

Besprechung: 04.02.22 in den Übungen

Übungsaufgabe

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Differentialform Vektorfeld ω_λ gegeben durch

$$\omega_\lambda(x,y,z) = \Big(\frac{\lambda xz}{1+x^2} + y\Big)dx + xdy + (\log(1+x^2) - \lambda z)dz\,.$$

(a) Untersuche, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die 1-Form $\omega_\lambda \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ein Potential besitzt, und bestimme für diese λ ein Potential von ω_λ.

(b) Berechne für die λ, für welche ω_λ ein Potential besitzt, das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega_\lambda$ entlang der Kurve $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(8\pi t), (t-1)^2 - t - 1, 5)$.

Übungsaufgabe

(a) Zeige, daß das Katenoid $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeige, daß die Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to M$, $\psi(v,u) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Finde eine möglichst große offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, so daß $\psi|_U : U \to M$ eine Parametrisierung ist.

(c) Zeige, daß $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant \cosh^2(z)\}$ eine glatt berandete Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist, und lege auf $M = \partial D$ die Randorientierung fest. Zeige, daß ψ orientierungserhaltend ist.

(d) Berechne die globale Darstellung der Volumenform ω_M des Katenoids und die lokale Darstellung bezüglich der Karte $\psi^{-1} : \psi(U) \to U$.

(e) Berechne $\psi^*(f\omega_M)$, wobei $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

(f) Berechne $\displaystyle\int_M \frac{1}{x^2+y^2}\,\omega_M$.

Übungsaufgabe

(a) Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\int_D x \cos y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; D ist begrenzt durch $y = 0$, $y = x^2$, $x \in [0,2]$.

(ii) $\int_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

(iii) $\int_D y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9, 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

(iv) $\int_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D = \{(x,y) : 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16\}$.

(bitte wenden)

(v) $\int_D (y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ a,b > 0\}$.

(vi) $\int_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 4\}$.

(vii) $\int_D z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$.

(b) Sei $b > a > 0$ und $\lambda := \sqrt{1 - (\frac{a}{b})^2}$. Wir betrachten die Oberfläche des Rotationsellipsoiden mit den Halbachsen b, b, a. Zeigen Sie: Der Flächeninhalt von $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1\}$ ist $2\pi(b^2 + \frac{a^2}{\lambda}\operatorname{arcsinh}(\frac{b\lambda}{a}))$.
(c) Berechnen Sie $\int_{S^2} x^3\,\mathrm{d}y \wedge\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z \wedge dx + z^3\,\mathrm{d}x \wedge\,\mathrm{d}y$, wobei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre mit der Orientierung als Rand der Einheitskugel ist.

Übungsaufgabe
Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und ist $\mu \in C^0(K)$ mit $\mu \geqslant 0$ (Dichteverteilung), so heißen $m(K) = \int_K \mu(x)\,d\lambda_n(x)$ die Masse und $s(K) = \frac{1}{\lambda_n(K)}\big(\int_K x_i \mu(x)\,d\lambda_n(x)\big)_{1 \leq i \leq n}$ der Schwerpunkt von K zu Dichteverteilung μ.
(a) Berechne den Schwerpunkt der Halbkugel $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leqslant a,\ x_3 \geqslant 0\}$ zu einer Dichteverteilung der Gestalt $\mu(x) = c\|x\|_2$, mit $c > 0$.
(b) Beweise, daß wenn eine ebene kompakte Menge um eine äußere, in der Ebene gelegene Achse rotiert, so ist das Volumen des erzeugten Rotationskörpers gleich der Fläche der Menge multipliziert mit dem Umfang des Kreises, den ihr Schwerpunkt (bzgl. der Dichte $\mu = 1$) beschreibt (*Erste Guldinsche Regel*).
(c) Es seien $0 < r < R$. Durch Rotation der Kreisscheibe $B_r((0,R))$ in der xy–Ebene um die x–Achse in $\mathbb{R}^3$ erhält man einen Torus T. Berechne $\lambda_3(T)$.
(d) Sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^3)$ eine Einbettung, deren Bild C in der Rechten offenen Halbebene der x-z-Ebene verläuft. Sei M die Rotationsfläche, die bei Rotation des Bildes C um die z-Achse entsteht. Gebe eine sinnvolle Definition für den Schwerpunkt von C und zeige: Der Flächeninhalt von M beträgt das Produkt der Länge von C mit dem Umfang des Kreises, den den Schwerpunkt von C beschreibt (*Zweite Guldinsche Regel*).

Übungsaufgabe
Bestimme den Flächeninhalt der Wendelfläche

$$W = \{(r\cos v, r\sin v, v) : (v,r) \in [0,4\pi] \times (0,2)\},$$

und der Viviani-Fläche (Blatt 4).

Übungsaufgabe
Sei $M = \{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z,\ z \leqslant 1\}$ und sei ν das nach Innen (des Paraboloids) zeigende Einheitsnormalenfeld. Betrachte das Vektorfeld $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X(x,y,z) = (z,x,y)$. Berechne auf zwei Arten das Integral

$$\int_M \langle \operatorname{rot} X, \nu \rangle\, dA\,.$$