Vorlesung Darstellungstheorie

§ 1. Beispiele und Definitionen

1.1 Definition
Sei G eine Gruppe, V ein k-Vektorraum. Eine Darstellung von G auf V ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$.

1.2 Definition
Darstellungen $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ und $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ heißen äquivalent oder isomorph $\Leftrightarrow \exists$ Isomorphismus von Vektoräumen, $f : V_1 \to V_2$ mit Matrix M, so daß gilt:
$\rho_2(g) = M\rho_1(g)M^{-1} \ \forall g \in G$

1.3 Definition
Ein Köcher $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ist ein gerichteter Graph. Dabei ist Q_0 die Menge der Ecken, Q_1 die Menge der Kanten und $s, t : Q_1 \to Q_0$ sind Abbildungen, die einer Kante α ihren Anfangspunkt $s(\alpha)$ und ihren Endpunkt $t(\alpha)$ zuweisen.

1.4 Definition
Sei k ein Körper und Q ein Köcher. Eine Darstellung von Q (über k) ordnet jedem Punkt x einen $k-$Vektorraum $V(x)$ zu und jeder Kante α eine $k-$lineare Abbildung $V(\alpha) : V(s(\alpha)) \to V(t(\alpha))$.

1.5 Definition
Sei Q ein Köcher, U und V seien $k-$Darstellungen.
(a) Ein Homomorphismus $f : U \to V$ ist ein Satz von linearen Abbildungen $f(x)$ für $x \in Q_0, f(x) : U(x) \to V(x)$, so daß $\forall\ \alpha \in Q_1,\ \alpha = (x \to y)$ das folgende Diagram kommutiert:

$$\begin{tikzcd} U(x) \arrow[r, "U(\alpha)"] \arrow[d, "f(x)"'] & U(y) \arrow[d, "f(y)"] \\ V(x) \arrow[r, "V(\alpha)"'] & V(y) \end{tikzcd}$$

d.h. $V(\alpha) \circ f(x) = f(y) \circ U(\alpha)$
f heißt Isomorphismus $\Leftrightarrow$ alle $f(x)$ sind Vektorraum-Isomorphismen. U und V heißen isomorph (als Darstellungen) $\Leftrightarrow$ es gibt einen Isomorphismus $f : U \to V$.

(b) Die direkte Summe von U und V ist die Darstellung $U \oplus V$ mit $(U \oplus V)(x) := U(x) \oplus V(x)$ (als Vektorraum) und

$$(U \oplus V)(\alpha) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & 0 \\ 0 & V(\alpha) \end{pmatrix} \text{(Blockmatrix).}$$

Eine Darstellung W heißt zerlegbar, wenn $W \neq 0$ (Nulldarstellung $0(x) = 0\ \forall x$) und $\exists\ U, V \neq 0$ mit $W \simeq U \oplus V$.

W heißt unzerlegbar:$\Leftrightarrow W$ nicht zerlegbar.

§ 2. Algebren, Darstellungen und Moduln

2.1 Definition

Sei k ein Körper. Eine $k-$Algebra A ist ein Ring, der gleichzeitig ein k-Vektorraum ist, so daß gilt:

$$\forall\ a, b \in A, \lambda \in k : \lambda\ (ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

2.2 Definition

$A = kG$ heißt Gruppenalgebra (über k) der endlichen Gruppe G.

2.3 Definition

$A = kQ$ heißt die Wegealgebra des Köchers Q.

2.4 Proposition

$A = kQ$ ist endlich-dimensional über $k \Leftrightarrow Q$ enthält keine Schleifen und keine orientierten Zyklen.

2.5. Definition

(a) Seien A, B zwei k-Algebren. Ein Algebrenhomomorphismus $\varphi : A \to B$ ist ein $k-$linearer Ringhomomorphismus.
(b) Sei A eine $k-$Algebra, V ein $k-$Vektorraum. Eine Darstellung von A auf V ist ein Algebrenhomomorphismus $\varphi : A \to \mathrm{End}_k(V)$.

2.6 Definition

Sei A eine $k-$Algebra. Ein A-Linksmodul M ist ein $k-$Vektorraum M mit einer Abbildung $A \times M \to M, (a, m) \mapsto a \cdot m$, so daß gilt:
$1 \cdot m = m\ \forall\ m \in M\ (1 = \text{Eins in } A)$
$a \cdot (n + m) = a \cdot n + a \cdot m\ \forall\ a \in A,\ \forall\ n, m \in M$
$(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m\ \forall\ a, b \in A\ \forall\ m \in M$
$(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)\ \forall\ a, b \in A\ \forall\ m \in M$
$(a\lambda) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)\ \forall\ a \in A\ \forall\ m \in M\ \forall\ \lambda \in k$
Entsprechend definiert man $A-$Rechtsmodul: $M \times A \to M, (m, a) \mapsto m \cdot a$
mit $(m \cdot a) \cdot b = m \cdot (ab)$ usw.

2.7 Proposition

Sei A eine $k-$Algebra.
(a) Sei $\varphi : A \to \mathrm{End}_k(V)$ eine Darstellung von A. Dann ist V ein $A-$Linksmodul durch $a \cdot v := \varphi(a)(v)$.
(b) Sei M ein $A-$Linksmodul. Dann hat A eine Darstellung $\varphi : A \to \mathrm{End}_k(M)$ mit $\varphi(a)(m) := a \cdot m$.

§ 3. Radikale und einfache Moduln

3.1 Definition
Sei A eine k-Algebra, X, Y, S $A-$Linksmoduln.
(a) X heißt Teilmodul (oder Untermodul) von Y (und die zugehörige Darstellung heißt Teil- oder Unterdarstellung): $\Leftrightarrow X$ ist ein Untervektorraum von Y und die Strukturabbildung $A \times X \to X$ ist die Einschränkung der Strukturabbildung von $Y, A \times Y \to Y$.
X heißt echter Teilmodul von $Y :\Leftrightarrow X \neq Y$.
(b) S heißt einfacher A-Modul (und die zugehörige Darstellung heißt einfach oder irreduzibel): $\Leftrightarrow S \neq \{0\}$ und S hat außer $\{0\}$ keinen echten Teilmodul.

3.2 Definition
Sei A eine $k-$Algebra, seien X, Y zwei A-Moduln. Ein Modulhomomorphismus $f : X \to Y$ ist eine k-lineare Abbildung welche die A-Struktur erhält:

$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x) \ \forall a \in A, x \in X$$

Ist f zusätzlich bijektiv, dann heißt er Isomorphismus.

3.3 Lemma
Sei $f : A \to S$ ein surjektiver Homomorphismus auf einen einfachen A-Modul S. Dann ist $M := \text{Ker}(f)$ ein maximales Linksideal von $A : M \subset I \subset A, I$ Linksideal $\Rightarrow I \in \{M, A\}$. Sei umgekehrt $M \subset A$ ein maximales Linksideal. Dann ist der Quotient A/M ein einfacher $A-$Modul.

3.4 Definition
Sei A eine k-Algebra. Das (Jacobson-)Radikal J von A ist der Schnitt aller maximalen Linksradikale von

$$A : \text{rad}A = J \ = \bigcap_{M \subset A \text{ max. Linksideal}} M = \bigcap_{M \subset A \text{ Linksideal}} M$$

3.5 Proposition
Sei A eine k-Algebra, J ihr Jacobson-Radikal.
(a) Für $a \in A$ sind äquivalent:
(a1) $a \in J$
(a2) $a \in \cap \{N | N$ maximaler A-Linksmodul$\}$
(a3) $\forall\, b \in A \ \exists\, c : (1 - ab)\ c = c\ (1 - ab) = 1$
(a4) $\forall\, b \in A \ \exists\, c : (1 - ab) = 1$
(a5) $\forall\, b \in A \ \exists\, c : (1 - ba)\ c = c\ (1 - ba) = 1$
(a6) $\forall\, b \in A \ \exists\, c : (1 - ba) = 1$
(b) $J = \cap \{N | N$ maximales Rechtsideal$\}$
(c) J ist ein zweiseitiges Ideal von A, A/J ist eine k-Algebra
(d) $\text{rad}(A/\text{rad}A) = \{0\}$
(e) Sei I ein 2-seitiges Ideal von A, I sei nilpotent, das heißt $\exists\, n \in \mathbb{N} : I^n = \{0\} \Rightarrow I \subset J$

3.6 Definition
Sei M ein A-Linksmodul. Das Radikal von M, rad M, ist der Schnitt aller maximalen

echten Teilmoduln von M,

$$\mathrm{rad} M = \bigcap_{N \subsetneqq M} N$$

3.7 Definition
Sei M ein $A-$Linksmodul. Der <u>Annulator</u> $\mathrm{Ann}({}_AM)$ von M ist

$$\mathrm{Ann}({}_AM) := \{a \in A : a \cdot m = 0 \ \forall \ m \in M\}$$

3.8 Proposition
Für $a \in A$ sind äquivalent:
(a1) $a \in \mathrm{rad} A$
(a2) $a \in \mathrm{Ann}({}_AS)$ für jeden einfachen A-Modul S.
(b) $\mathrm{rad} A = \bigcap \{\mathrm{Ann}({}_AS) : S \text{ einfach}\}$

3.9 Proposition
Sei M eine A-Linksmodul. Dann gilt

$$\mathrm{rad}\ M = \bigcap_{p: A \to S \text{ einfach}} \mathrm{Ker}(p)$$

3.10 Defiition
Ein A-Linksmodul M heißt <u>halbeinfach</u>: $\Leftrightarrow \exists$ einfache Moduln $S_1, \ldots, S_n$ (nicht notwendig verschieden), so daß gilt:

$$M \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$$

3.11 Proposition
Für einen A-Linksmodul gilt: $\mathrm{rad}\ M = \{0\} \Leftrightarrow M$ halbeinfach.
Insbesondere sind $\bar{A} = A/\mathrm{rad} A$ und $\bar{M} = M/\mathrm{rad} M$ halbeinfach.

3.12 Korollar
$\bar{A} = A/\mathrm{rad} A$ ist ein halbeinfacher A-Modul und jeder einfache A-Modul ist isomorph zu einem direkten Summanden von $\bar{A}$. Insbesondere gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache A-Moduln.

3.13 Lemma
Seien X, Y zwei $A-$Linksmoduln. Dann gilt $\mathrm{rad}\ (X \oplus Y) = \mathrm{rad}\ X \oplus \mathrm{rad} Y$

3.14 Lemma
Sei $f : X \to Y$ ein A-Modulhomomorphismus. Dann gilt: $f\ (\mathrm{rad} X) \subset \mathrm{rad}\ Y$.

3.15 Theorem ("Nakayamas Lemma")
(a) $f : X \to Y$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \bar{f} : X/\mathrm{rad} X \to Y/\mathrm{rad} Y$ ist surjektiv
(b) Sei M eine A-Modul mit $\mathrm{rad} A \cdot M = M$. Dann ist $M = \{0\}$.

3.16 Korollar
Sei A eine endlich-dimensionale K-Algebra, dann ist $\mathrm{rad} A$ nilpotent: $\exists\ n \in \mathbb{N}$ mit $(\mathrm{rad}\ A)^n = \{0\}$. Also ist $\mathrm{rad} A$ das größte nilpotente Ideal in A.

3.17 Proposition
Für einen A-Linksmodul M gilt:

$$\text{rad } M = \text{rad } A \cdot M$$

4. Halbeinfache Algebren

4.1 Definition
Eine Algebra B heißt halbeinfach $\Leftrightarrow$ der reguläre Linksmodul ${}_BB$ ist halbeinfach.

4.2 Theorem (Satz von Maschke)
Sei G eine endliche Gruppe, k ein Körper der Charakteristik p mit $p = 0$ oder $p \not| |G|$. Dann ist kG eine halbeinfache Algebra.

4.3 Definition
Eine $k-$Algebra A heißt einfach: $\Leftrightarrow$ für jedes zweiseitige Ideal $I \subset A$ gilt: $I = 0$ oder $I = A$.

4.4 Theorem (Schurs Lemma)
Sei A eine $k-$Algebra (endlich dimensional), S ein einfacher $A-$Modul. Dann ist $E := \text{End}_A(S) = \text{Hom}_A(S, S)$ ein Schiefkörper; jeder Endomorphismus $f \neq 0$ ist ein Isomorphismus.

4.5 Korollar (Satz von Weierstrass und Dedekind)
Sei A eine kommutative halbeinfache k-Algebra. Dann existieren Körpererweiterungen $k_1, \cdots, k_n$ von k, so daß $A \simeq k_1 \oplus \cdots \oplus k_n$

4.6 Theorem (Satz von Wedderburn und Artin)
Die endlich-dimensionalen halbeinfachen k-Algebren sind genau die Algebren von der Form

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^{l} M_{n_i \times n_i}(D_i)$$

für endlich-dimensionale Schiefkörper D_i, die k enthalten. Diese Zerlegung von A ist eindeutig bis auf Reihenfolge (das heißt A bestimmt die D_i, n_i und l).

4.7 Definition
Ein Element $e \in A$ heißt Idempotent: $\Leftrightarrow e^2 = e$.
Idempotente e, f heißen orthogonal: $\Leftrightarrow ef = fe = 0$.
Ein Idempotent $e \neq 0$ heißt primitiv: $\Leftrightarrow e$ lässt sich nicht als Summe $e = \Sigma e_i$ mehrerer, paarweise orthogonaler Idempotente schreiben.
Ein Idempotent e heißt zentral: $\Leftrightarrow e \in Z(A) = \{a \in A : ab = ba \ \forall \ b \in A\}$ und zentral-primitiv, falls es zentral ist und nicht in eine orthogonale Summe zentraler

Idempotente zerlegt werden kann.

§ 5. Kompositionsreihen und Zerlegungen

5.1 Definition
Sei M ein A-Modul. Eine endliche Kette von Teilmoduln. $0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n$ mit M_{l+1}/M_l einfach für $l = 1, \cdots, n-1$ heißt Kompositionsreihe oder Jordan-Hölder-Reihe von M.
Die vorkommenden einfachen Moduln $S_{l+1} \simeq M_{l+1}/M_l$ heißen Kompositionsfaktoren von M, die Multiplizität (Vielfachheit) von S einfach zählt die l mit $S \simeq M_{l+1}/M_l$, $n = \sum$ Multiplizitäten heißt die Länge (oder Kompositionslänge) von M.

5.2 Theorem (Satz von Jordan-Hölder)
Seien $0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ und $0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_l = M$ Kompositionsreihen von M. Dann gilt $n = l$ und die Kompositionsfaktoren und ihre Mulitplizitäten stimmen überein. Zwei Kompositionsreihen unterscheiden sich also höchstens in der Reihenfolge der Faktoren.

5.3 Proposition
Sei M ein A-Modul und $E := \mathrm{Hom}_A(M, M)$ sein Endomorphismenring. Dann existiert eine bijektive Zuordnung

$$\{M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \text{ Zerlegung in direkte Summanden }\} \overset{1:1}{\leftrightarrow}$$
$$\{1_E = e_1 + \cdots + e_n \text{ Zerlegung in paarweise orthogonale Idempotente }\}$$

wobei $M_i \leftrightarrow (e_i : M \overset{Proj}{\twoheadrightarrow} M_i \overset{Inkl}{\hookrightarrow} M)$

5.4 Korollar
Sei M eine A-Modul. Dann ist M unzerlegbar $\Leftrightarrow 0, 1$ sind die einzigen Idempotente in $\mathrm{End}_A(M)$.

5.5 Definition
Ein A-Modul P heißt projektiv: $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : P$ ist isomorph zu einem direkten Summanden von $A^n = \overline{A \oplus \cdots \oplus A}$

5.6 Lemma
Sei $I \lhd A, I$ nilpotent, $u \in A$ mit $u^2 - u \in I$, das heißt $\bar{u}^2 = \bar{u}$ (Restklassen modulo I). Dann existiert $e = e^2 \in A$ mit $e - u \in I$. Insbesondere gibt es für jedes Idempotent $f \in \bar{A}$ ein Idempotent $e \in A$ mit $\bar{e} = f$.

5.7 Lemma
Sei P projektiv, $f : M \to N$ ein surjektiver A-Modul-Homomorphismus und $g : P \to N$ irgendein Homomorphismus. Dann existiert ein Homomorphismus $h : P \to M$ mit $f \circ h = g$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ & P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "\exists h"] \end{tikzcd}$$

5.8 Lemma
Sei Q ein Modul mit der Eigenschaft: $\forall f : M \overset{surj}{\to} N, g : Q \to N$ existiert $h : Q \to M$ mit $f \circ h = g$.Dann ist Q (bis auf Isomorphie) ein direkter Summand von A^n für ein $n \in \mathbb{N}$, das heißt Q ist projektiv.

5.9 Lemma
Seien P und Q projektive A-Moduln. Dann gilt:
$P \simeq Q \Leftrightarrow \bar{P} := P/\mathrm{rad}P \simeq \bar{Q} := Q/\mathrm{rad}Q$

5.10 Theorem
Die Abbildung $P \mapsto P/\mathrm{rad}P$ liefert eine Bijektion

$$\{ \text{ projektive Moduln } \}/\simeq \quad \overset{1-1}{\leftrightarrow} \quad \{ \text{ halb-einfache Moduln } \}/\simeq .$$

Seien $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_l$ Zerlegungen von P (projektiv) in direkte Summen unzerlegbarer Moduln. Dann gilt $n = l$ und $P_i \simeq Q_i$ (bis auf Anordnung). Die Anzahl der Isomorphieklassen von unzerlegbaren projektiven Moduln P ist gleich der Anzahl von Isomorphieklassen einfacher Moduln $P/\mathrm{rad}P$.

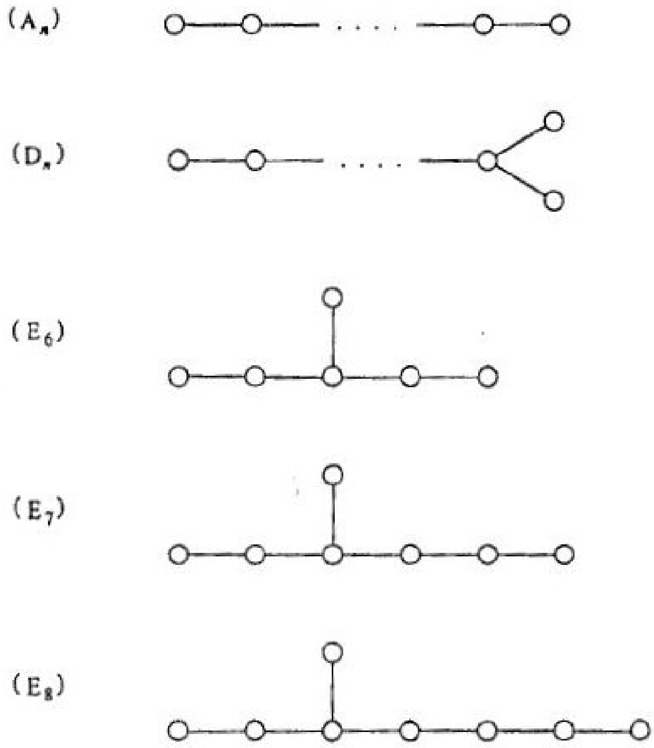
5.11 Korollar
Seien $1 = e_1 + \cdots + e_n = f_1 + \cdots + f_l$ zwei Zerlegungen der Eins in eine Summe von primitiven orthogonalen Idempotenten. Dann gilt $n = l$, und es existiert ein invertierbares Element $a \in A$ mit $a^{-1} e_i a = f_i$ (bis auf Anordnung).

5.12 Theorem(Satz von Krull-Remak-Schmidt)
Sei A endlich-dimensionale Algebra, und seien $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n = N_1 \oplus \cdots \oplus N_l$ zwei Zerlegungen in direkte Summen von unzerlegbaren A-Moduln. Dann gilt $n = l$ und $M_i \simeq N_i$ (bis auf Anordnung).

§ 6. Dynkindiagramme und der Satz von Gabriel

6.1 Definition
Eine Algebra hat <u>endlichen Darstellungstyp</u> (ist darstellungsendlich): $\Leftrightarrow$ A hat, bis auf Isomorphie, nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen.

Liste der Dynkindiagramme:



6.2 Definition
Sei Q ein Graph. Für $i, j \in Q_0$ sei $d_{ij} = d_{ji} := \sharp$ Kanten zwischen i und j. Wir bezeichnen mit (-,-): $\mathbb{Z}^{|Q_0|} \times \mathbb{Z}^{|Q_0|} \to \mathbb{Z}$ die symmetrische Bilinearform mit

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} -d_{ij}, & i \neq j \\ 2 - 2d_{ii}, & i = j \end{cases}$$

und mit q die quadratische Form $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ mit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n=|Q_0|} x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j$$

6.3 Definition
Die Menge der Wurzeln von Q ist

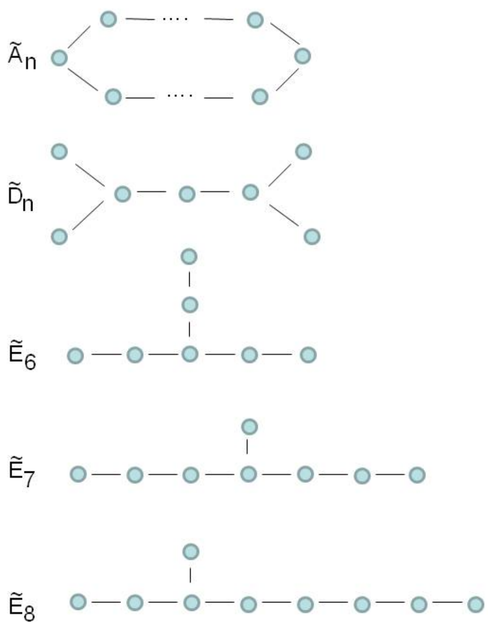
$$\Delta := \{x \in \mathbb{Z}^n | q(x) \leq 1\}$$

x heißt positive Wurzel, falls $x \in \Delta$ und $x_i \geq 0 \; \forall i$ und $x \neq 0$.

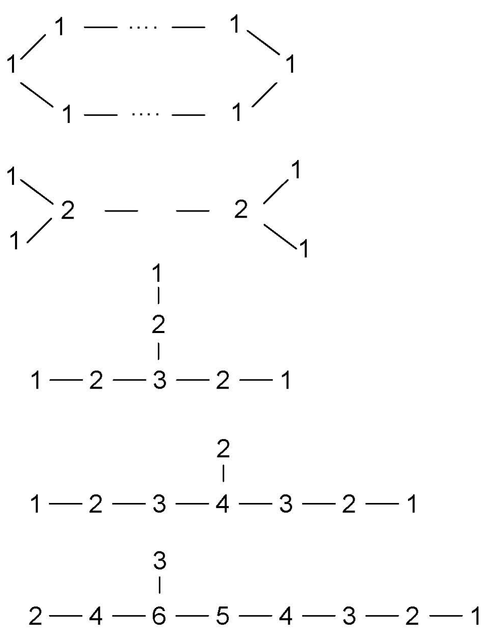
6.4 Definition
Sei $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ eine quadratische Form (und (-,-) wie oben).

(1) Das Radikal von q ist
rad$q := \{x \in \mathbb{Z}^n : (x, -) = 0$, das heißt $(x, y) = 0 \; \forall y \in \mathbb{Z}^n\}$
(2) q heißt positiv definit $:\Leftrightarrow q(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$
(3) q heißt positiv semi-definit $:\Leftrightarrow q(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{Z}^n$
(4) Ein Vektor $x \in \mathbb{Z}^n$ heißt aufrichtig$:\Leftrightarrow x_i \neq 0 \; \forall i$

6.5 Theorem
Sei Q ein zusammenhängender Graph und q seine quadratische Form. Dann gilt:
(a) q positiv definit $\Leftrightarrow$ Q Dynkin (A_n, D_n, E_6, E_7, E_8)
(b) q positiv semi-definit, aber nicht positiv definit $\Leftrightarrow$ Q Euklidisch (= erweitert Dynkin = affin Dynkin):



In diesem Fall gilt: $\exists! \delta \in \mathbb{Z}^n, \delta$ positiv : $\mathrm{rad} q = \mathbb{Z}\delta$



6.6 Definition
Ein Punkt $i \in Q_0$ heißt Quelle, wenn an i kein Pfeil endet, i heißt Senke, wenn an i kein Pfeil beginnt. Sei i eine Quelle oder Senke, dann ist $\sigma_i\overrightarrow{Q}$ der Köcher, der aus Q entsteht, indem man an i alle Pfeile umdreht und sonst nichts ändert.
Eine Anordnung $i_1, \dots, i_n$ von Q_0 heißt zulässig, wenn für jedes j gilt: i_j ist eine Senke in $\sigma_{i_{j-1}} \cdots \sigma_{i_1}\overrightarrow{Q}$.

6.7 Definition
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher und $i \in Q_0$ eine Senke.
Wir definieren eine Zuordnung, den Spiegelungsfunktor, $S_i^+ : k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod} \to k(\varphi_i Q)-\mathrm{mod}$ auf Moduln und auf Modulhomomorphismen:

$$Y_j = X_j \text{ für } j \neq i$$

$$Y_i \text{ definiert durch } Y_i \xrightarrow{\overline{\varphi}} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{\varphi} X_i, \text{das heißt } Y_i = \mathrm{Ker}(\varphi), \overline{\varphi} = \text{Inklusion}$$

$$Y_\alpha = X_\alpha \text{ für } t(\alpha) \neq i$$

$$Y_\alpha : Y_i \xrightarrow{\mathrm{proj} \circ \overline{\varphi}} X_{s(\alpha)} = Y_{s(\alpha)} \text{ für } t(\alpha) = i$$

$X, X' \in k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod}, f : X \to X'$ ein Homomorphismus, dann ist $g = S_i^+ f$ die Abbildung mit $g_j = f_j$ für $j \neq i$

$$g_i : Y_i \to Y_i' \text{ die Einschränkung von } \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \xrightarrow{(f_{s(\alpha)})} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X'_{s(\alpha)}$$

6.8 Definition
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher und i eine Quelle. Wir defnieren eine Zuordnung, den Spiegelungsfunktor $S_i^- : k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod} \to k(\sigma_i\overrightarrow{Q})-\mathrm{mod}$ auf Moduln und auf Modulhomomorphismen:
$X \in k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod}$, dann ist $Y = S_i X$ die Darstellung mit

$$Y_j = X_j \text{für } j \neq i$$

$$Y_i \text{ definiert durch } X_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_i \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \xrightarrow{\overline{\psi}} Y_i,\ \psi \text{ Projektion, das heißt } Y_i = \mathrm{Coker}(\psi)$$

$$Y_\alpha = X_\alpha \text{ für } s(\alpha) \neq i$$

$$Y_\alpha : Y_{t(\alpha)} = X_{t(\alpha)} \to Y_i$$

Einschränkung von $\overline{\psi}$ auf $X_{t(\alpha)}$ für $s(\alpha) = i$.
$X,\ X' \in k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod}, f : X \to X'$ ein Homomorphismus, dann ist $g = S_i^- f$ die Abbildung mit $g_j = f_j$ für $j \neq i$ und $g_i : Y_i \to Y'$ die Abbildung in dem Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r] \arrow[d, "fi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \bigoplus_{s(\alpha)=i} X_{t(\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, "(fj)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y_i \arrow[d, "(gj)"', "\text{existiert (da } X_i \text{ in } X_i{}' \text{ geht)}"] \\
X_i' \arrow[r] & \bigoplus_{s(\alpha)=i} X'_{t(\alpha)} \arrow[r] & Y_i{}'
\end{tikzcd}$$

6.9 Lemma
(a) Sei i eine Senke. Dann ist $\iota_i X : S_i S_i^+ X \to X$ ein Modulhomomorphismus mit $(\iota_i X)_j = id_{X_j}$für $j \neq i$, und $(\iota_i X)_i : (S_i^- S_i^+ X)_i = \mathrm{Coker}(\overline{\psi}) \cong\cong \mathrm{Im}\varphi \to X_i$ und $\mathrm{Coker}(\iota_i X)$ ist halbeinfach, genauer: eine direkte Summe von Kopien des einfachen Moduls $S(i)$.
(b) Sei i eine Quelle. Dann ist $\pi_i X : X \to S_1^+ S_i^- X_i$, ein Modulhomomorphismus, mit $(\pi_i X)_j = id_{X_j}$ für $j \neq i$ und $(\pi_i X)_i : X_i \to \mathrm{Im}\psi \cong \mathrm{Ker}\overline{\psi} = (S_i^+ S_i^- X)_i$, und $\mathrm{Ker}(\pi_i X)$ ist halbeinfach, genauer: eine direkte Summe von Kopien des einfachen Moduls $S(i)$.

6.10 Lemma
Sie X eine Darstellung von $k\overrightarrow{Q}$.
(a) Sei $i \in Q_0$ eine Senke. Dann gilt $X = S_i^- S_i^+ X \oplus \mathrm{Coker}(\iota_i X)$. Falls $\mathrm{Coker}(\iota_i X) = 0$, dann gilt $\underline{\dim}\ (S_i^+ X) = \sigma(\underline{\dim} X)$.
(b) Sei $i \in Q_0$ eine Quelle. Dann gilt: $X = S_i^+ S_i X \oplus \mathrm{Ker}(\pi_i X)$. Falls $\mathrm{Ker}\pi_i X = 0$, dann gilt $\underline{\dim}(S_i X) = \sigma_i(\underline{\dim} X)$.

6.11 Lemma
Sei $i \in Q_0$ eine Senke, X eine unzerlegbare Darstellung von $\overrightarrow{Q}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(a) $X \not\simeq S(i)$
(b) $S_i^+ X$ unzerlegbar,$\neq 0$
(c) $S_i^+ X \neq 0$
(d) $S_i^- S_i^+ X \simeq X$
(e) Für $\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_i \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{\varphi} X_i$ gilt: φ ist surjektiv.
(f) $\sigma_i(\underline{\dim} X) > 0$
(g) $\underline{\dim} S_i^+ X = \sigma_i(\underline{\dim} X)$

6.12 Theorem
Die Funktoren S_i^+ und S_i^- definieren zueinander inverse Bijektionen
$\{$unzerlegbare Darstellungen von $\overrightarrow{Q}$ ohne $S(i)\} \simeq \overset{1:1}{\leftrightarrow}$ unzerlegbare Darstellungen von $\sigma_i \overrightarrow{Q}$ ohne $S(i)\}/\simeq$ wobei gilt: $\underline{\dim}(S_i^{\pm} X) = \sigma_i(\underline{\dim} X)\ \forall\ X$ unzerlegbar $\neq S(i)$

6.13 Korollar
Die Köcher $\overrightarrow{Q}$ und $\sigma_i \overrightarrow{Q}$ haben dieselbe "Anzahl" von unzerlegbaren Darstellungen (über demselben Körper k).

6.14 Definition
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher ohne orientierte Zyklen und $i_i, \dots, i_n$ eine zulässige Anordnung von Q_0. Die Coxeterfunktoren (bezüglich dieser Anordnung)
sind $C^+ = S^+_{i_n} \cdots S^+_{i_1} : k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod} \to k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod}$
und $C^- = S^-_{i_1} \cdots S^-_{i_n} : k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod} \to k\overrightarrow{Q}-\mathrm{mod}$

Notation: für $r \in \mathbb{Z}$ setze $C^r := \begin{cases} (C^+)^r \text{ für } r > 0 \\ \mathrm{Id} \text{ für } r = 0 \\ (C^-)^{-r} \text{ für } r < 0 \end{cases}$

Die Abbildung $c : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ mit $c(x) = \sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1}(x)$ heißt Coxetertransformation.
$I(i) :=$ Modul mit Basis $\{$Wege, die bei i enden$\}$. $I(i)$ heißt unzerlegbar injektiv.
I injektiv $\Leftrightarrow \forall\ 0 \to$
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Beispiel: $D(A_A) = \mathrm{Hom}_{AK}(A_A, k)$

6.15 Proposition
(a) $\underline{\dim} P(i) = \sigma_i \cdots \sigma_{i-1}(e_i)$ und $\underline{\dim}\ I(i) = \sigma_n \cdots \sigma_{i+1}(e_i)$
(b) $P(i) \simeq S^-_1 \cdots S^-_{i-1}(S(i))$ und $I(i) \simeq S^+_n \cdots S^+_{i+1}(S(i))$
(c) Sei X unzerlegbar. Dann gilt

$$C^+X = 0 \Leftrightarrow \exists i : X \simeq P(i)$$
$$C^-X = 0 \Leftrightarrow \exists i : X \simeq I(i)$$

6.16 Proposition
Sei Q Dynkin oder Euklidisch.
(a) Jedes e_i ist eine Wurzel
(b) $x \in \Delta, y \in \mathrm{rad}q \Rightarrow -x, x + y \in \Delta$
(c) $x \in \Delta \Rightarrow x > 0$ oder $x < 0$
(d) Q Euklidisch $\Rightarrow \Delta/\mathrm{rad}q$ endlich
(das heißt $\exists \Delta_0$ endlich $\Delta_0 \subset \Delta$, so daß gilt: $x \in \Delta \Rightarrow x = x_0 + x_1, x_0 \in \Delta_0, x_1 \in \mathrm{rad}q$)
(e) Q Dynkin $\Rightarrow \Delta$ endlich

6.17 Korollar
Sei Q Dynkin oder Euklidisch, sei x eine positive Wurzel, so daß $\sigma_i(x)$ nicht positiv ist. Dann ist $x = e_i$.

6.18 Proposition
(a) Für jedes $i \in Q_0$ gilt: $c(\underline{\dim} P(i)) = -\underline{\dim} I(i)$
(b) $\{\underline{\dim} P(i) | i \in Q_0\}$ und $\{\underline{\dim} I(i) | i \in Q_0\}$ sind zwei Basen von $\mathbb{Z}^n$
(c) Für $x, y \in \mathbb{Z}^n$ gilt: $< \underline{\dim} P(i), x >= x_i =< x, \dim I(i) >$ für jedes $i \in Q_0$ und

$< x, y > = - < y, c(x) > = < c(x), c(y) >$, wobei $< -, - >$ die Eulerform von $\overrightarrow{Q}$ bezeichnet: $< -, - >: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$,

$$< x, y > := \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)},$$

also $(x, y) = < x, y > + < y, x >$
(d) Für $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt: $c(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathrm{rad} q$.
(e) Für Q Dynkin, $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt: $\exists r \geq 0$ so daß $c^r(x)$ nicht positiv ist.

6.19 Theorem (Satz von Gabriel)
(a) Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher mit Q Dynkin. Dann ist $k\overrightarrow{Q}$(k irgendein Körper) von endlichem Darstellungstyp. Die Zuordnung $X \mapsto \underline{\dim} X$ ergibt eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen von $\overrightarrow{Q}$ und den positiven Wurzeln der quadratischen Form q von Q (unabhängig von der Orientierung).
(b) Sei $\overrightarrow{Q}$ ein zusammenhängender Köcher, k ein Körper, $k\overrightarrow{Q}$ von endlichem Darstellungstyp. Dann ist Q Dynkin.

7. Euklidsche Diagramme

7.1 Definition
Sei X eine unzerlegbare Darstellung von $k\overrightarrow{Q}$.
X heißt $\underline{präprojektiv}$ $:\Leftrightarrow \exists i \in Q_0, r \subseteq 0 : X \simeq C^r P(i)$
X heißt $\underline{präinjektiv}$ $:\Leftrightarrow \exists i \in Q_0, r \geq 0 : X \simeq C^r I(i)$
X heißt $\underline{regulär}$ $:\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{Z} : C^r X \neq 0$

7.2 Proposition
Sei Q euklidisch. Eine unzerlegbare Darstellung von $k\overline{Q}$ ist präprojektiv, präinjektiv oder regulär. Seien X, Y unzerlegbare Darstellungen, X präprojektiv oder präinjektiv; dann gilt $X \simeq Y \Leftrightarrow \underline{dim} X = \underline{dim} Y$ (also: X präprojektiv oder präinjektiv unzerlegbar ist durch seinen Dimensionsvektor eindeutig bestimmt). Genauer gilt:
$C^r P(i) \simeq C^s P(j) \neq 0 \Rightarrow i = j, r = s$
$C^r I(i) \simeq C^s I(j) \neq 0 \Rightarrow i = j, r = s$

7.3 Lemma
Sei Q Euklidisch, $x \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt:
(a) $\exists h > 0 : c^h = \mathrm{Id}$ auf $\mathbb{Z}^n / \mathrm{rad}(q)\mathbb{Z}$
(b) $c^h(x) > 0 \; \forall r \in \mathbb{Z} \Rightarrow c^h(x) = x$
(c) $c^h(x) = x \Rightarrow < \delta, x > = 0$

7.4 Definition
Sei $\overrightarrow{Q}$ Euklidisch. Der <u>Defekt</u> eines Vektors $x \in \mathbb{Z}^n$ ist definiert als $\partial x = <\delta, x> = - < x, \delta >$.
Der <u>Defekt</u> einer Darstellung X ist $\partial X = \partial\ \underline{dim} X$.

7.5 Proposition
Sei $\overrightarrow{Q}$ Euklidisch, X unzerlegbar. Dann gilt:
(a) X präprojektiv $\Leftrightarrow \partial X < 0$
(b) X präinjektiv $\Leftrightarrow \partial X > 0$
(c) X regulär $\Leftrightarrow \partial X = 0$

7.6 Theorem
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher ohne orientierte Zyklen, Q Euklidisch, $|Q_0| = n$. Dann liefert $X \mapsto \underline{\dim} X$ eine Bijektion
$\{X$ unzerlegbar präprojektiv$\}/\simeq \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{x$ positive Wurzel, $\partial x < 0\}$
$\{X$ unzerlegbar präinjektiv$\}/\simeq \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{x$ positive Wurzel, $\partial x > 0\}$

Die unzerlegbaren präprojektiven Darstellungen bestehen aus n abzählbaren Serien $C^{-r}P(i)$ mit $i \in Q_0, r \in \mathbb{N}_0$, die unzerlegbare präinjektive Darstellung aus n abzählbaren Serien $C^r I(i)$, wobei je zwei Serien disjunkt sind.

Einbettung von kQ_j-mod $\hookrightarrow kQ_k,-$mod in den regulären Teil.

$V(n,\lambda) = (k^n \xrightarrow{A} k^n) \quad \mapsto \quad (k^n \underset{\mathrm{Id}}{\overset{A}{\rightrightarrows}} k^n)$
mit A =
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[loop above, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mapsto & V \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "1"'] \arrow[d, "\alpha"'] & V \arrow[d, "\alpha"] \\ U \arrow[loop below, "\psi"] & \mapsto & U \arrow[r, shift left, "\psi"] \arrow[r, shift right, "1"'] & U \end{tikzcd}$$

mit $\alpha \circ \varphi = \psi \circ \alpha$

§ 8. Darstellungtheorie endlicher Gruppen

G ist immer endliche Gruppe. Ab jetzt $k = \mathbb{C}$, also $\mathbb{C}G$ halbeinfach.
Wedderburn: $k\mathbb{C} \simeq M_{f1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{fr}(\mathbb{C})$
Es gibt also genau r einfache $\mathbb{C}G-$Moduln $S_i, \ldots, S_r$ bis auf Isomorphie, einer davon ist der triviale Modul $S_1 = \mathbb{C}$ mit $g \cdot a = a \ \forall \ a \in \mathbb{C}, g \in G$.
$f_i = \dim S_i$ ist der <u>Grad</u> von S_i, $f_1 = \deg(S_1) = 1$.

8.1 Korollar

$$\sum_{i=1}^{r} f_i^2 = |G|$$

8.2 Satz

$r = \sharp$ Konjugationsklassen von C

8.3 Definition

U ein $\mathbb{C}G-$Modul, dann definiert jedes $g \in G$ eine lineare Abbildung

$$F_g : U \to U, u \mapsto g \cdot u$$

Die Abbildung $\chi = \chi_n : G \to \mathbb{C}, g \mapsto \mathrm{tr}(F_g)$ heißt <u>Charakter</u> (von U, von G).
Eine Abbildung $\varphi : G \mapsto \mathbb{C}$ heißt <u>Klassenfunktion</u> falls sie konstant auf Konjunktionsklassen ist.
Die Klassenfunktionen bilden einen $r-$dimensionalen Vektorraum $CF(G)$. Dabei sind die r irreduziblen Charaktere (der r Isomorphieklassen einfacher Moduln) linear unabhängig in $CF(G)$, bilden also eine Basis.

8.4 Proposition

Sei U ein $\mathbb{C}G-$Modul, $g : G \to \mathrm{End}(U)$ zugehörige Darstellung und $\varphi : G \to \mathbb{C}$ der Charakter. Dann gilt:
(i) $\chi(g)$ ist diagonalisierbar
(ii) $\chi(g)$ ist die Summe der Eigenwerte von $\varphi(G)$, alle Eigenwerte sind $|G|$ -te Einheitswurzeln
(iii) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$
(iv)$|\chi(g)| \leq \chi(1)$
(v) $\{x \in G | \chi(x) = \chi(1)\}$ ist Normalteiler von G.

8.5 Satz

Seien $S_1, \ldots, S_r$ die verschiedenen einfachen $\mathbb{C}G-$Moduln mit Charakteren $\chi_1, \cdots, \chi_r$.
Dann hat der $\mathbb{C}G-$Modul $S_1^{a_1} \oplus, \ldots, S_r^{a_r}$ den Charakter $a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r$.
Zwei $\mathbb{C}G-$Moduln sind also isomorph genau dann wenn sie den gleichen Charakter haben.
Notation: $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_i | i = 1, \ldots, r\}$ <u>irreduzible Charaktere</u>
Bemerkung: Die Isomorphieklasse von einfachen $\mathbb{C}G-$Moduln sind also durch deren

Charaktere bestimmt bzw. durch deren Werte auf den Konjugationsklassen. Diese lassen sich einfach in einer $r \times r-$Matrix, der Charaktertafel von G darstellen.

8.6 (Erste Orthogonalitätsrelation)
Für

$$1 \leq i, j \leq r \text{ gilt} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij}|G|$$

8.7 (Zweite Orthogonalitätsrelation)
Seien $g, h \in G$, dann gilt:

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \begin{cases} |C_G(g)| & \text{falls } g, h \text{ konjugiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

8.8 Definition
Sei $H \leq G$ Untergruppe, φ Charakter von H zum $\mathbb{C}H-$Modul U.
Dann heißt $\mathrm{Ind}_H^G U := \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U$ induzierter $\mathbb{C}G-$Modul.
Sei

$$\chi := \mathrm{Ind}_H^C \varphi = \chi_{\mathrm{Ind}_H^C U}$$

$$\Rightarrow \chi(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\varphi}(xgx^{-1}),$$

wobei

$$\dot{\varphi}(y) = \begin{cases} \varphi(y) & \text{falls } y \in H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

8.9 Satz (Frobenius Reziprozität)
Seien $H \leq G, \varphi$ Charakter von H, χ Charakter von $G \Rightarrow (\varphi, \chi|_H)_H = (\mathrm{Ind}_H^G \varphi, \chi)_G$

Sei $N \lhd G,\ \theta \in CF(N),\ {}_x \in G$, dann heißt ${}^x\theta : N \to \mathbb{C}$ mit$({}^x\theta)(h) = \theta(x^{-1}hx)$ für $h \in N$ die konjugierte Klassenfunktion

8.10 Lemma
Seien $N \lhd G, \varphi, \theta \in CF(N), x, y \in G$, dann gilt:
(i) ${}^x\varphi \in CF(N)$
(ii)${}^y({}^x\varphi) = {}^{yx}\varphi$
(iii) $({}^x\varphi, {}^x\theta) = (\varphi, \theta)$
(iv) $(\chi|_N, \varphi^{\varphi}) = (\chi|_H, \varphi)\ \forall \chi \in CF(G)$
(v) φ Charakter $\Rightarrow {}^x\varphi$ Charakter

8.11 Satz (Clifford)
Sei $N \lhd G, \chi \in \mathrm{Irr}(G), \theta \in \mathrm{Irr}(N)$ mit $(\chi|_N, \theta) = e > 0$, und seien $\theta = \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ die

verschiedenen in G konjugierten Charaktere zu θ.
Dann gilt:

$$\chi|_N = e \cdot \sum_{i=1}^{k} \theta_i.$$

8.12 Korollar
Sei $N \lhd G$ und sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $(\chi|_N, 1_N)_N \neq 0$.
Dann ist $N \leq \mathrm{Ker}(\chi) := \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$

8.13 Satz
Seien V, W $\mathbb{C}G-$Moduln mit Charakteren χ, θ. Dann ist $\chi \cdot \theta$ der Charakter von $V \otimes W$, wobei $(\chi \cdot \theta)(g) = \chi(g) \cdot \theta(g)$. Insbesondere sind also Produkte von Charakteren wieder Charaktere.

8.14 Proposition
$\mathrm{Irr}(G \times H) = \{\chi \times \psi | \chi \in \mathrm{Irr}(G), \psi \in \mathrm{Irr}(H)\}$ wobei $(\chi \times \psi)(g, h) = \chi(g) \cdot \psi(h)$