Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dr. A. Stylianou

SS 2011

Funktionalanalysis

1. Übung

Abgabe: Montag, 11.04.2011, bis 18:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:

In Analogie zu $\mathbb{R}^N = \{x = (x_1, \dots, x_N) \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ für } n = 1, \dots, N\}$ definieren wir die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$ als

$$\mathbb{R}^\infty := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\}.$$

Wie auch $\mathbb{R}^N$ bildet $\mathbb{R}^\infty$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, bezüglich gliedweiser (komponentenweiser) Addition und gliedweiser Multiplikation mit rellen Zahlen. Ferner sei

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j, \end{cases} \qquad \text{für } i, j \in \mathbb{N},$$

und $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ mit $a_{ij} = \frac{1}{i}\delta_{ij}$.

(a) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, $x \mapsto Ax$, mit $(Ax)_i := \sum_{j=1}^\infty a_{ij}x_j = \frac{1}{i}x_i$ (Matrixmultiplikation, wenn man so will) bijektiv ist.

(c) Geben Sie $S = (s_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ an, so dass $S = A^{-1}$, also $SAx = ASx = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^\infty$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $e^k = (e^k_n)_n \in \mathbb{R}^\infty$ gegeben durch $e^k_n := \delta_{kn}$, $n \in \mathbb{N}$ (in Analogie zu den Vektoren der Standardbasis in $\mathbb{R}^N$, nun für "$N = \infty$"). Ferner sei $B := \{e^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^\infty$.

(a) Zeigen Sie, dass B linear unabhängig ist (d.h., je endlich viele verschiedene $e^{k_1}, \dots, e^{k_m}$ sind linear unabhängig).

(b) Zeigen Sie, dass B kein Erzeugendensystem in $\mathbb{R}^\infty$ ist, indem Sie ein $x \in \mathbb{R}^\infty$ angeben, dass sich nicht als endliche Linearkombination von Elementen aus B darstellen lässt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir definieren die Menge der beschränkten Folgen als

$$l^\infty := \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^\infty \mid \|x\|_\infty < \infty\}, \quad \text{mit } \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \,.$$

Offenbar gilt $\|e^k\|_\infty = 1$ für $e^k = (e^k_n)_n$ aus Aufgabe 2, womit (e^k) eine beschränkte Folge in l^∞ ist. Zeigen Sie, dass $(e^k)_k$ keine konvergente Teilfolge in l^∞ hat.

Dabei verstehen wir Konvergenz in l^∞ wie folgt: Ist (x^k) eine Folge in l^∞, so konvergiert x^k in l^∞ gegen ein $x \in l^\infty$ ($\lim_{k\to\infty} x^k = x$), wenn $\|x^k - x\|_\infty \to 0$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Zeigen Sie die folgende Aussagen:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2;$$

(b) für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ mit $(x, y)_{\mathbb{R}^N} = 0$ gilt

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Hier ist $|x| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_N^2}$ die euklidische Norm und $(x, y)_{\mathbb{R}^N} := x_1y_1 + ... + x_Ny_N$ das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^N$.

(5 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html

Dort können Sie sich auch im Zeitraum **vom 4.4.2011 bis zum 7.4.2011 online für Übungsgruppen anmelden**, und die Gruppeneinteilung wird am 8.4.2011 dort bekannt gegeben.