Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dr. A. Stylianou

SS 2011

Funktionalanalysis

2. Übung

Abgabe: Montag, 18.04.2011, bis 18:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Gehören die unten gegebenen Funktionen zu $H^{1,2}(-1,1)$? Finden Sie ihre verallgemeinerte Ableitung oder zeigen Sie, daß sie nicht existiert.

a) $f(x) = |x|$,

b) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0\ , \\ 1 & \text{falls } x > 0\ . \end{cases}$

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Warum ist $C[a,b] = \{u : [a,b] \to \mathbb{C} \mid u \text{ stetig}\}$ mit dem Skalarprodukt

$$(u,v) = \int_a^b u(x)\bar{v}(x)dx$$

kein Hilbertraum? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Der Raum $\ell^2 = \{(c_1, c_2, \ldots) \mid c_j \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C},\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty\}$ mit dem Skalarprodukt

$$(a,b) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \bar{b}_j$$

ist ein Prä-Hilbertraum. Zeigen Sie, daß ℓ^2 auch ein Hilbertraum ist.
Hinweis: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständig.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir betrachten den reellen Hilbertraum $L^2(0,1)$ mit Skalarprodukt $(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$. Darin sei P_0 die Menge der Polynome von Grad 0 (konstante Funktionen) und P_1 die Menge der Polynome mit Grad ≤ 1 (affine Funktionen). Sie bilden abgeschlossene Unterräume von $L^2(0,1)$. (Wieso?) Bestimmen Sie für beliebiges $u \in L^2(0,1)$ explizit:

(a) die orthogonale Projektion von u auf P_0 und den Abstand von u zu P_0;

(b) die orthogonale Projektion von u auf P_1 und den Abstand von u zu P_1.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html