Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2011**
Dr. S. Krömer
Dr. A. Stylianou

Funktionalanalysis

3. Übung

Abgabe: Dienstag, 26.04.2011, bis 10:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Sei H ein Hilbertraum und $K \subset H$ eine abgeschlossene und konvexe Menge. Nach dem Projektionssatz existiert für jedes $u \in H$ ein eindeutig bestimmtes $v \in K$, so dass $\|u-v\| = \inf_{w\in K} \|u-w\|$; wir definieren damit $P_K(u) := v$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $P_K : H \to H$ ist eine "Projektion", d.h. $P_K(P_K(u)) = P_K(u)$.

(b) Für jedes $v \in K$ und jedes $u \in H$ gilt $(u - P_K(u), v - P_K(u)) \leq 0$.
Hinweis: Es gilt $\|u - P_K(u)\| \leq \|u - w\|$ für jedes $w \in K$ (warum?). Diskutieren Sie nun für $w(t) := (1-t)P_K(u) + tv$, $t \in [0,1]$, die Funktion $t \mapsto \|u - w(t)\|^2$ in der Nähe von $t = 0$.

(c) Für alle $u_1, u_2 \in H$ gilt $\|P_K(u_1) - P_K(u_2)\| \leq \|u_1 - u_2\|$.
Hinweis: Nutzen Sie (b) zweimal, mit u_1 bzw. u_2 anstelle von u und jeweils geeignet gewähltem v, und verwenden Sie auch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|\,, \quad \|x\|_2 := \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|\,, |x_2|\}.$$

Für $p = 1, 2, \infty$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist die zugehörige Operatornorm definiert durch

$$\|A\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{x\in\mathbb{R}^2,\ \|x\|_p=1} \|Ax\|_p\,.$$

Finden Sie für $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $p = 1, 2, \infty$ je einen Vektor $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so dass $\|A\|_p \|y\|_p = \|Ay\|_p$ gilt, und geben Sie $\|A\|_p$ an.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Sei H ein reeller Hilbertraum und $a, b \in H \setminus \{0\}$ mit $(a, b) = 0$. Wir definieren den linearen Operator $T : H \to H$ mit $Tx := (x, b)a + (x, a)b$. Zeigen Sie, dass $\|T\| = \|a\|\|b\|$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\|T\|$, wenn $T : L^2(0, \pi) \to L^2(0, \pi)$ durch

$$(Tu)(x) := \sin x \int_0^\pi u(t) \cos t \, dt + \cos x \int_0^\pi u(t) \sin t \, dt$$

gegeben ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes offenes Intervall und $u \in C^1(a, b)$. Ferner sei

$$\|u\|_{C([a,b])} := \sup_{t\in(a,b)} |u(t)| \,, \quad \|u\|_{W^{1,p}(a,b)} := \left(\int_a^b \left(|u'(t)|^p + |u(t)|^p \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty.$$

Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen (wobei Sie stets annehmen dürfen, dass die jeweilige rechte Seite endlich ist):

(a) $|u(x)| \;\leq\; \int_a^b |u'(t)| \, dt + |u(y)|$ für alle $x, y \in (a, b)$.

(b) $\|u\|_{C([a,b])} \;\leq\; \int_a^b |u'(t)| \, dt + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(t)| \, dt \;\leq\; C_1 \|u\|_{W^{1,1}(a,b)}$,
mit der Konstante $C_1 := \max\left\{1, \frac{1}{b-a}\right\}$.

(c) $\|u\|^2_{C([a,b])} \;\leq\; \left((b-a)^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2(a,b)} + (b-a)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(a,b)}\right)^2 \;\leq\; C_2 \|u\|^2_{W^{1,2}(a,b)}$,
mit der Konstante $C_2 := \max\left\{b-a, \frac{1}{b-a}\right\} + 1$.
Hinweis: Für $v \in L^2(a, b)$ ist $\int_a^b |v(t)| \, dt = (|v| \,, 1)_{L^2(a,b)} \leq \|v\|_{L^2(a,b)} \|1\|_{L^2(a,b)}$.

Auf den folgenden Übungsblättern werden wir die Ergebnisse dieser Aufgabe wieder aufgreifen, in mehreren Aufgaben, in denen wir Eigenschaften von $W^{1,2}(a, b)$ näher besprechen.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html