Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2011**
Dr. S. Krömer
Dr. A. Stylianou

Funktionalanalysis

4. Übung

Abgabe: Montag, 02.05.2011, bis 17:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Finden Sie für die gegebenen Abbildungen jeweils die adjungierte Abbildung:

a) $A : \ell^2 \to L^2(0,\infty)$, $\quad (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto f$, wobei $f(x) := \xi_{\lceil x \rceil}$ für $x \in (0,\infty)$ mit der Zahl $\lceil x \rceil \in \mathbb{N}$, für die $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$ gilt (x aufgerundet).

b) $B : L^2(0,\infty) \to \ell^2$, $\quad f \mapsto \left(\int_{k-1}^{k} h(x) f(x) dx \right)_{k\in\mathbb{N}}$, mit einer fest gewählten, messbaren und beschränkten Funktion $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es seien H, H_1, H_2 komplexe Hilberträume. Zeigen Sie:

a) Sind $A_1, A_2 : H_1 \to H_2$ beschränkte lineare Operatoren und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so gilt

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^*.$$

b) Ist $A : H \to H$ linear und beschränkt, so gilt

$$AA^* = A^*A \iff \|Ax\| = \|A^*x\| \quad \forall x \in H \quad .$$

Hinweis: Rechnen Sie bei “$\Leftarrow$” zunächst $\|Ax\|^2$ und $\|A^*x\|^2$ für $x = y + z$ und $x = y + iz$ aus, mit $y, z \in H$ beliebig.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^N$ und $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Abbildung $A : H^{1,2}(\Omega) \to H^{1,2}(\Omega)$ mit

$$(Av, w)_{H^{1,2}} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx \quad \text{für alle} \quad v, w \in H^{1,2}(\Omega).$$

Hier ist "$\cdot$" das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^N$.

(b) A ist linear, beschränkt, und selbstadjungiert.

(c) Eine Lösung $u \in H^{1,2}(\Omega)$ von

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx \quad \text{für alle} \quad w \in H^{1,2}(\Omega) \tag{1}$$

existiert dann und nur dann, wenn $\int_\Omega f \, dx = 0$ gilt. Kann u eindeutig sein?
Hinweis: Sie dürfen dabei ohne Beweis annehmen, dass das Bild von A abgeschlossen ist. Wenden Sie dann die Fredholm-Alternative an.

Bemerkung: Eine Funktion $u \in H^{1,2}(\Omega)$, die (1) erfüllt, nennt man *schwache Lösung* des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

wobei $\partial_\nu u$ die Abbleitung von u in die Richtung des äusseren Normalenvektores ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes offenes Intervall und $u \in W^{1,2}(a, b)$. Zusätzlich zu $W^{1,2}(a, b)$ betrachten wir den Raum

$$C_b(a, b) := \left\{ v \in C(a, b) \;\middle|\; \|v\|_{C_b(a,b)} := \|v\|_{C([a,b])} = \sup_{t \in (a,b)} |v(t)| < \infty \right\}.$$

Da $W^{1,2}(a, b) = H^{1,2}(a, b)$ gilt, gibt es eine Folge (u_n) in $\tilde{H}^{1,2}(a, b) = C^1(a, b) \cap W^{1,2}(a, b)$, die bezüglich der Norm von $W^{1,2}$ gegen u konvergiert. Vom letzten Blatt wissen wir zudem, dass $u_n \in C_b(a, b)$ für jedes n gilt.

(a) Zeigen Sie, dass (u_n) eine Cauchy-Folge in $C_b(a, b)$ ist. Da $C_b(a, b)$ vollständig ist (ohne Beweis), existiert damit $\bar{u} := \lim_{n\to\infty} u_n \in C_b(a, b)$ (Konvergenz bezüglich der Norm von $C_b(a, b)$).

(b) Zeigen Sie, dass $\|u_n - \bar{u}\|_{L^2(a,b)} \to 0$, und dass $\bar{u}(x) = u(x)$ für fast alle $x \in (a, b)$ gilt.
Bemerkung: Dies zeigt, dass zu jedem $u \in W^{1,2}(a, b)$ ein eindeutig bestimmter stetiger Repräsentant, nämlich $\bar{u}$, existiert. In diesem Sinne ist $W^{1,2}(a, b)$ in $C_b(a, b)$ "eingebettet"; salopp schreibt man $W^{1,2}(a, b) \subset C_b(a, b)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Einbettungsabbildung $u \mapsto \bar{u}$, $W^{1,2}(a, b) \to C_b(a, b)$, linear ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Einbettungsabbildung auch stetig ist, also dass

$$\|\bar{u}\|_{C_b(a,b)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,2}(a,b)} \quad \text{für alle } u \in W^{1,2}(a, b)$$

gilt, mit einer von u unabhängigen Konstanten $C > 0$.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html